

## 磁場閉じ込めプラズマ乱流におけるデータ駆動的モード分解手法の開発

日大生産工(院) ○古田原拓実, 日大生産工 佐々木真, 統数研 矢野恵佑, 統数研 奥野彰文,  
QST 瀬戸春樹, 名大 河内裕一, 核融合研 小林達哉, 京大 金史良

### 1. 背景

乱流は、気象・海洋や大気、核融合プラズマ等、普遍的に存在し、エネルギー・粒子輸送を支配するとともに、突発的な構造形成や急激な輸送を駆動する。太陽フレアや、核融合プラズマ中のEdge Localized Mode (ELM)はその例であり、システム発展に重大な影響を及ぼす。よって、突発現象の発生機構の理解は多分野に共通する重要課題である。

突発現象の解析においては、乱流と自己組織的に形成される大規模構造との相互作用が注目されてきた。一方で、フーリエ分解を用いた解析では自由度が増大し、解析が煩雑化するという問題がある[1, 2]。そこで近年、少数自由度でのモード分解としてデータ駆動科学的手法が発達してきた。特に Singular Value Decomposition(SVD)はデータから直交基底を抽出することで、少数自由度化およびモードエネルギーの定義を可能するため、乱流輸送解析に適用されている[3-7]。

一方で、SVDはデータの定義された座標系に関わらずそれがデカルト座標であるものとして直交基底に分解してしまうため、核融合プラズマ乱流のように曲線座標系で表現されるデータに対し、単純に適用すると物理空間における直交性が保たれない。従来はデカルト座標変換を経てSVDを適用していたが、曲線を直交メッシュで埋めるためデータ量やノイズの増加を招く。曲線座標上で直接適用でき、モード間の直交性を保つSVDの構築が求められている。更に、突発輸送のように複数物理量間の相互作用が重要な現象では、各物理量に別々にSVDを適用すると異なる基底が得られ、物理量間の結合において異なるモード間で干渉が生じる。そのため、複数の物理量から共通の基底を抽出可能な分解手法が必要である。

本研究では、曲線座標系でのモード直交性を保つSVDを提案し、複数物理量に対応できるように拡張することで、突発輸送を駆動する支配的モードの抽出とモード間エネルギー伝達の定量化の基盤手法を提案する。

### 2. 拡張特異値分解

突発輸送の物理的理解に向けて、(1)モード間エネルギー相互作用の定量化を可能にする座標変換不変SVDと、(2)複数物理量間の輸送解析を定量化する多重場SVDを提案する。

**(1) 座標変換不変SVD**：曲線座標上でモード間直交性を保持する座標変換不変SVD[4]を提案する。SVDはデカルト座標データの分解を前提としており、微小要素の重みであるヤコビアン $J(\mathbf{x})$ が空間的に変化する曲線座標系においては次の直交条件を満たさない。

$$\int \varphi_k \varphi_{k'} J d\mathbf{x} = \delta_{kk'} \quad (1)$$

ここで $\varphi_k$ はSVDにより得られる空間基底である。すなわち、モード $X_k$ 毎のエネルギー分解

$$E = \sum_k \int |X_k|^2 J d\mathbf{x} \quad (2)$$

が成立しない。そこで、座標変換不変SVDではデータに $\sqrt{J(\mathbf{x})}$ を重みとして付与し、

$$\hat{X}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{J(\mathbf{x})} X(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

に対してSVDを適用する。得られる基底 $\hat{\varphi}_k$ が曲線座標上でもモード直交性が満たし、曲線座標に直接適用可能なモード分解を実現する。

**(2) 多重場SVD**：突発輸送現象では密度・流れなど複数物理量の相関が重要である。そこで、複数物理量同時分解が可能な多重場SVDが提案されている[5,6]。複数場 $X(\mathbf{x}, t), Y(\mathbf{x}, t)$ を結合した拡張データ行列

$$F = (X(\mathbf{x}, t_1), \dots, Y(\mathbf{x}, t_n)) \quad (4)$$

に対してSVDを行うことで、共通の空間基底 $\varphi_k$ を抽出できる。これにより、異なる物理量間の相互作用を共通基底上で定量的に評価することが可能となる。

### 3. 円筒プラズマにおける突発輸送解析

#### 3.1 座標変換不変SVDによる相互作用評価

円筒プラズマシミュレーションにより得られた静電ポテンシャル $\phi(r, \theta)$ の数値乱流場に座標変換不変SVDを適用し、従来SVDとの比較を行った。円筒座標系におけるヤコビアンは

---

Development of data-driven mode decomposition in magnetized plasmas.

Takumi KODAHARA, Makoto SASAKI, Keisuke YANO, Akifumi OKUNO,  
Haruki SETO, Yuichi KAWACHI, Tatsuya KOBAYASHI and Fumiyoshi KIN

$J = r$ で定義される。図1(a),(b)は、それぞれ座標変換不変SVDおよび単純なSVDにより得られた空間基底間の内積マトリクスを示す。横軸・縦軸はモード番号、カラーバーは内積値を表す。対角成分( $k = k'$ )は同モード同士の内積、非対角成分は異なるモード同士の内積に対応する。座標変換不変SVDでは非対角成分が消え、曲線座標でもモード直交性が保持される。さらに、エネルギー相互作用に寄与する高次微分項の空間分布を図1(c),(d)に示す。従来SVDでは座標変換に起因するノイズが顕著であるのに対し、座標変換不変SVDでは滑らかな分布が得られた。このように座標変換不変SVDを用いることで、曲線座標におけるモード間直交性の担保とノイズ低減を実現でき、定量的なエネルギー相互作用解析を可能とする。

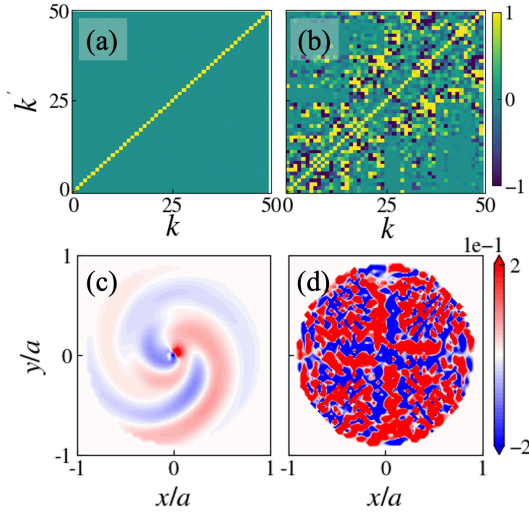


図1 (a)座標変換不変 SVD と(b)単純な SVD で得られる基底で評価したモード間内積。(c)座標変換不変 SVD と(d)単純な SVD で計算した高次微分項の空間分布[4]。

### 3.2 多重場 SVD による突発輸送解析

シミュレーションで計算した密度 $N(r, \theta)$ と静電ポテンシャル $\phi(r, \theta)$ に対し多重場 SVD を適用し、突発輸送の駆動モードを特定した。粒子輸送は以下のように定義する。

$$\Gamma_{r,\alpha\beta} = -N_\alpha \partial_\theta \phi_\beta \quad (5)$$

ここで、 $N_\alpha$ と $\phi_\beta$ は同一の空間基底を持つ密度と静電ポテンシャルの SVD モードに対応する( $\alpha, \beta$ : モードインデックス)。[8]と同様のクラスタリングによりモードを分類することで得られる 4 つの構造を図 2 (a)に示す。A, B, C, D はそれぞれ背景場、帯状流、コヒーレントモード、インコヒーレントモードに対応する。式(5)

に基づき評価した各モードの輸送寄与を図 2(b)に示す。横軸・縦軸はそれぞれ密度モードとポテンシャルモードのインデックス、カラーバーは輸送寄与の大きさを表す。解析の結果、突発輸送発生時には静電ポテンシャルのモード D が支配的に寄与していることが明らかとなった [7]。これにより、多重場 SVD が異なる物理量間の相互作用の定量的評価に有効であることが示された。

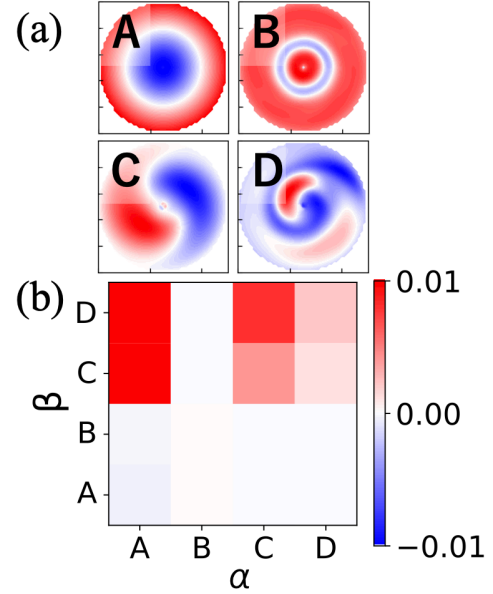


図2 (a) 多重場SVDとクラスタリング[8]により得られる乱流場の4つの主要モード。(b)突発輸送発生時の各モードの寄与[7]。

### 4. まとめ

本研究では、曲線座標系に直接適用可能な座標変換不変SVDを提案し、円筒プラズマ乱流に適用することで、モード間直交性の保持と高次微分項のノイズ低減を実現した。さらに多重場 SVDにより密度とポテンシャルの相互作用を解析し、突発輸送を駆動する支配的モードを特定した。これらの結果は、座標系に依存しない定量的なエネルギー相互作用解析の有効性を示すものである。

### 参考文献

- [1] S. -I. Itoh, *et al.*, *PFR*, **12**, 1101003 (2017).
- [2] T. Yamada, *et al.*, *PRL*, **105**, 225002 (2010).
- [3] M. Sasaki, *et al.*, *PPCF*, **63**, 025004 (2021).
- [4] T. Kodahara, *et al.*, in prep. (2025).
- [5] T. Kodahara, *et al.*, *PFR*, **18**, 1202036 (2023).
- [6] G. Ytomi, *et al.*, *PPCF*, **65**, 095014 (2023).
- [7] T. Kodahara, *et al.*, *PPCF*, **67**, 065012 (2025).
- [8] A. Okuno, *et al.*, *PFR*, **67**, 1201035 (2024).