

プラズマ乱流の時空間予測に対する

POD-Galerkin ROM の適用

日大生産工(院) ○三橋 直弥 日大生産工 佐々木 真

1. 背景

近年、核融合プラズマや環境流体の二次元断面の乱流場では、突発輸送や周縁構造の変化が性能・安全を規定する [1-3]。しかし、乱流は非線形であり、高忠実度の数値解法による長時間・多条件の直接計算は計算資源の観点から困難である。この制約は、とくに運転条件を掃引して設計最適化や運用同定を行う場面で表面化する。このギャップを埋めるため、非侵入型の縮約モデル (Reduced-Order Modeling: ROM) が注目されており、中でも POD は支配的エネルギーモードを抽出して次元を縮約でき、可視化・再構成のみならず係数の内挿・外挿を通じた準予測にも用いられている [4,5]。一方、運転条件が変化すると基底が回転し、単一運転点で学習した ROM は劣化する [6]。

本研究は、[7] を踏まえて非侵入型の POD-ROM に焦点を当て、Grassmann 多様体補間、直接補間、Grassmann 基底を用いた Galerkin 投影の三手法を適用させた。その有効性は FOM との可視比較により評価し、二次元乱流場の構造類似と対角モード相関を指標に 3 つの手法を比較して、運転点変化に対する ROM 適応の質的差を明らかにする。

2. 対象データと解析手法

本研究では円筒形プラズマにおける簡約流体モデルに基づく乱流シミュレーションデータを解析対象とした [8,9]。本コードは、Numerical Linear Device (NLD) と呼ばれており、系の自律的な分布や乱流の非線形発展を計算することが可能である [10]。対象データとして、数値シミュレーションで得られた静電ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$ を用いた [9,11]。本手法では基底補間に渦度ソース強度を表すパラメータ S_U を変えた複数データを使用する。 S_U は、端点となる二つの運転点と、その中間に位置づけられる評価対象で構成する。 z 方向平均を取り $\phi(r, \theta, z) := \frac{1}{N_z} \sum_{k=1}^{N_z} \phi(r, \theta, z, t)$ と定

義して時間窓を切り出す。以降、 ϕ を列ベクトル化して $X \in \mathbb{R}^{n \times N_t}$, $n = N_r N_\theta$ として扱う。

POD による低次元化では、各端点 S_U の時系列平均 μ を差し引いた $X_c = X - \mu$ に対し特異値分解を行う。 $\text{rank} = r$ 個の POD 基底 $U \in \mathbb{R}^{n \times r}$ と係数列 $A = S_{1:r, 1:r} V_{:, 1:r}^T \in \mathbb{R}^{r \times N_t}$ を得て、端点に対応する組を (U_1, A_1, μ_1) , (U_2, A_2, μ_2) とする [4]。パラメトリック補間として評価対象に対する補間率 α を用い、係数と平均は線形補間する。基底補間は二通りを用いる。直接補間では、基底はユークリッド空間で線形合成し直交化して用いる。Grassmann 補間では、相互射影 $M = U_1^T U_2$ の特異値から主角を求め、 U_1 に直交な方向成分を抽出して接ベクトルを得る。 α に応じて測地線上の点を計算し、得られた基底を直交化して用いる [12,13]。係数と平均は端点間の線形補間とし、最終的な再構成は $X(t) = U_g A_*(t) + \mu_*$ で与える。物理拘束つき Galerkin ROM では、Grassmann 補間基底を用いて拡散とポアソン括弧型非線形を低次元空間へ投影し、極座標差分と面積重み付き内積に基づく ODE を構成する [5]。平均場の定数・線形寄与と微小正則化で安定化し、ODE を積分して得た係数から

$X_{\text{ROM}}(t) = \Phi a(t) + \mu_*$ を再構成する [7]。

3. 基底補間と物理拘束の効果

$r - \theta$ 面の時平均分散の比較を Fig. 1 に示す。パネルは順に (a)FOM (真値)、(b)直接 (Direct) 補間 ROM、(c)Grassmann 補間 ROM、(d)Galerkin ROM (Grassmann 基底) である。横軸は無次元方位角、縦軸は無次元半径であり、右側のカラーバーは時間平均分散 $\langle (\phi - \langle \phi \rangle_t)^2 \rangle_t$ を表す。評価対象 (Target) $S_U = 5 \times 10^{-3}$ の補間には端点 $S_U = 3 \times 10^{-3}$, $S_U = 7 \times 10^{-3}$ を用いた。結果として直接補間は方位角 3 周期の局在ローブと過大振幅を示し、Grassmann 補間は分散の大域スケールと半径プロファイルを最も良好に再現した。Galerkin ROM は長時間安定で分散オーダーと半径勾配を再現する一方、方位角に非対称

Application of POD-Galerkin ROM
to spatiotemporal prediction of plasma turbulence

Naoya MITSUHASHI, Makoto SASAKI

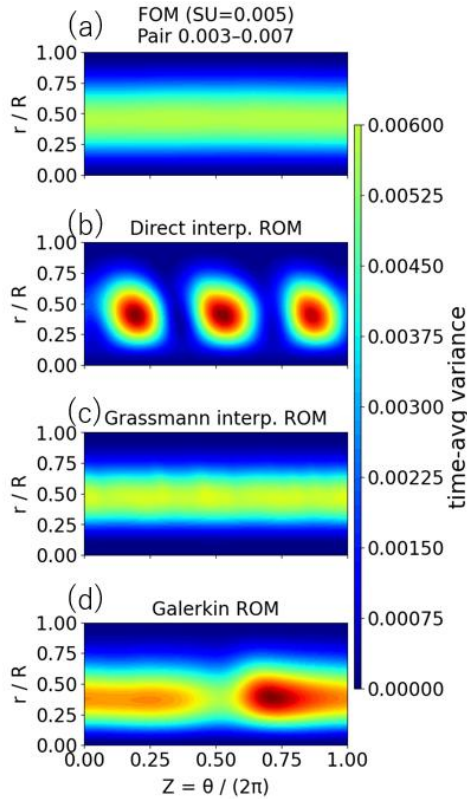


Fig.1 FOM と 3 種 ROM の時間分散

ローブが残存した。総合的な構造再現性は Grassmann > Galerkin >> Direct の順であった。

2つの基底同士の重み付き内積を行列に並べ、どの基底ベクトルがどれだけ重なっているかを可視化するため、基底間内積グラム行列を Fig. 2に示す。パネルは順に (a)直接補間ROM、(b)Grassmann補間ROM、(c)Galerkin ROMである。カラーバーは $\log_{10} |\phi_i, \phi_j|$ (白=小, 黒=大) であり、対角要素には $|\phi_i, \phi_j|$ 注記し、基底次元 $r = 12$ に対して実行した。直接補間は対角成分が1に届かず非対角が広く残り、直交化なしの線形合成に起因するモード混合が顕著である。一方 Grassmann補間は単位対角・微小な非対角となり、部分空間の曲率を考慮した補間で規格直交性が保たれる。Galerkin 用基底はユークリッド内積では非直交に見えるが、 W 内積では単位行列となり、物理内積での直交化・投影の有効性を裏付けており、本研究の Galerkin-ROM が W 直交性を満たすことを裏付ける。

4. まとめ

本研究は二次元乱流の時空間予測に向け、非侵入型POD-ROMを用いて (i) 直接補間, (ii) Grassmann補間, (iii) Grassmann基底上の物理拘束付きGalerkin-ROM を同一データで構

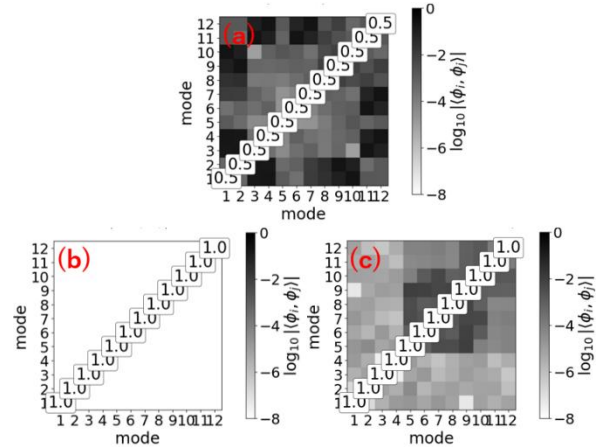


Fig.2 補間法別の基底直交性の評価

築・比較した。未学習中間条件における $r - \theta$ 面の時間平均分散と基底間内積グラム行列で評価した結果、Grassmann補間が最も構造再現性に優れ、Galerkinは長時間安定で分散のオーダーと勾配を捉える一方、方位角に位相固定ローブが残った。直接補間はモード混合が強く再現性が低い。実務上は整合性重視なら Grassmann、長時間安定性重視なら Galerkin の併用が有効である。今後は演算子係数の同定、多点補間、基底次元選択の自動化を進める。

参考文献

- [1] J. W. Connor, Plasma Phys. Control. Fusion 40, 191 (1998).
- [2] P. H. Diamond et al., Plasma Phys. Control. Fusion 47, R35 (2005).
- [3] P. W. Terry, Rev. Mod. Phys. 72, 109 (2000).
- [4] G. Berkooz et al., Annu. Rev. Fluid Mech. 25, 539 (1993).
- [5] B. R. Noack et al., J. Fluid Mech. 497, 335 (2003).
- [6] P. Benner et al., SIAM Rev. 57, 483 (2015).
- [7] S. Sato and O. T. Schmidt, *arXiv:2502.03754 [physics.flu-dyn]* (2025).
- [8] A. Hasegawa and M. Wakatani, Phys. Rev. Lett. 59, 1581 (1987).
- [9] N. Kasuya et al., J. Plasma Fusion Res. SERIES 9, 523 (2010)
- [10] M. Sasaki et. al., Plasma Phys. Control. Fusion 61 112001 (2019).
- [11] M. Sasaki et al., Phys. Plasmas 26 042305 (2019).
- [12] D. Amsallem and C. Farhat, AIAA J. 46, 1803 (2008).
- [13] D. Amsallem and C. Farhat, SIAM J. Sci. Comput. 33, 2169 (2011).