

2 次の微小変形メカニズムを用いた剛体折紙の分岐メカニズムの解析

日大生産工 ○早川健太郎

1. はじめに

面を変形させずに折線部分の回転のみで折ることのできる折紙を剛体折紙とよび、その変形機構を剛体折りメカニズムとよぶ。剛体折紙は人工衛星の太陽光パネルや建築物の可動式外装など幅広い分野で応用されている¹⁾。

剛体折紙の工学的応用において、その変形メカニズムを把握し、制御することは非常に重要であり、様々な解析手法が提案されている²⁾。特に、全ての面が同一平面上にある平坦状態は、剛体折りメカニズムの変形自由度が増加し、分岐を生じるメカニズムの特異点である場合が多い^{3, 4)}。そのため、変形の制御が困難になり、予期せぬ変形を生じる可能性がある。平坦状態は折紙を応用した構造の典型的な折り状態の一つであり利用される場面が多いため、平坦状態での剛体折りメカニズムの分岐を把握するための精緻な解析が不可欠である。

本研究では、平坦状態における剛体折りメカニズムの分岐現象を2次の微小変形メカニズムの理論^{4, 5)}を用いて解析する。解析には辺と面の対角線に沿って配置された棒部材を頂点でピン接合したFig.1に示すトラスモデル⁴⁾を用い、いくつかの例について平坦状態以外で接続しない分岐した剛体折り経路（空間）を示す。

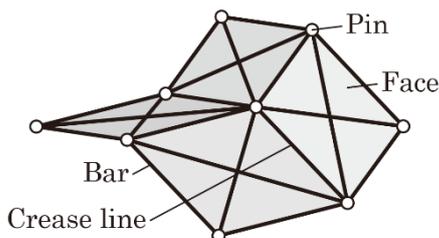


Fig.1 トラスモデルで表されたミウラ折り

2. トラスモデルの微小変形メカニズム

トラスモデルの部材数、節点数をそれぞれ m, n とおき、部材 i の初期長を l_i ($i=1, \dots, m$)、節点 j の位置ベクトルを $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^3$ ($j=1, \dots, n$) とする。部材 i の端部節点が節点 j, k のとき、折り過程で部材 i が変形しないために $\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$ に課される条件を部材 i のグリーンひずみを l_i^2 倍した量 $c_i(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$ を用いて以下のように定式化する⁴⁾。

$$c_i(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|^2 - l_i^2 \right) = 0 \quad (1)$$

全節点の位置ベクトルをまとめたベクトルを $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1^T \dots \mathbf{x}_n^T)^T \in \mathbb{R}^{3n}$ とおく。また、式(1)の c_i を全部材についてまとめたベクトルを \mathbf{X} の関数として $\mathbf{C}(\mathbf{X}) = (c_1(\mathbf{X}) \dots c_m(\mathbf{X}))^T \in \mathbb{R}^m$ とおく。剛体折紙は折り過程で面が変形しないため、 \mathbf{X} は以下の適合条件式を満たす。

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

式(2)は節点座標に関する連立2次方程式であり、解析解を得るのは一般に困難なため、 $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ の級数展開を用いた微小変形メカニズムを用いる。 \mathbf{X} を経路パラメータ t の関数 $\mathbf{X}(t)$ とみなし、 \mathbf{X} の t に関する一階、二階導関数をそれぞれ $\mathbf{X}'(t), \mathbf{X}''(t)$ とおく。以下では $t=0$ まわりでの級数展開を考え、 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0), \mathbf{X}'_0 = \mathbf{X}'(0), \mathbf{X}''_0 = \mathbf{X}''(0)$ とおく。 $\mathbf{C}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$ とすると、 $\mathbf{C}(\mathbf{X}(t))$ の級数展開は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{X}(t)) &= t \left. \frac{d\mathbf{C}}{dt} \right|_{t=0} + \frac{t^2}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{C}}{dt^2} \right|_{t=0} + \text{h.o.t.} \\ &= t\mathbf{\Gamma}_0^{(1)}\mathbf{X}'_0 + \frac{t^2}{2} \left\{ \mathbf{\Gamma}_0^{(1)}\mathbf{X}''_0 + \mathbf{\Gamma}_0^{(2)}(\mathbf{X}'_0)\mathbf{X}'_0 \right\} \\ &\quad + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{X}, \mathbf{X}'_0$ の第 j 成分をそれぞれ $X_j, X'_{0,j}$ とおくと、 $\mathbf{\Gamma}_0^{(1)}, \mathbf{\Gamma}_0^{(2)}(\mathbf{X}'_0) \in \mathbb{R}^{m \times 3n}$ の (i, j) 成分はそれぞれ $\left. \frac{\partial c_i}{\partial X_j} \right|_{t=0}, \sum_{k=1}^{3n} X'_{0,k} \cdot \left. \frac{\partial^2 c_i}{\partial X_j \partial X_k} \right|_{t=0}$ である。式(3)右辺の t の1から N 次の項の係数が全ての $\mathbf{0}$ のとき、トラスモデルは N 次の微小変形メカニズムを持ち、全ての次数の項の係数が $\mathbf{0}$ のとき、有限メカニズムを持つという。本稿で着目するトラスモデルの2次の微小変形メカニズムが存在する条件は、次式を満たす非自明な $\mathbf{X}'_0, \mathbf{X}''_0$ が存在することである。

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}_0^{(1)}\mathbf{X}'_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{\Gamma}_0^{(1)}\mathbf{X}''_0 + \mathbf{\Gamma}_0^{(2)}(\mathbf{X}'_0)\mathbf{X}'_0 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4)$$

経路パラメータ t を時刻とみなすと、 $\mathbf{X}'_0, \mathbf{X}''_0$ はそれぞれ $t=0$ での節点の速度と加速度である。

式(4)の第1式を満たす $\mathbf{X}'_0 \neq \mathbf{0}$ が存在するのは $\Gamma_0^{(1)}$ のランクが列数より小さいときであり、

$$f = 3n - \text{rank}\Gamma_0^{(1)} \quad (5)$$

を不安定次数とよぶ。 $f \geq 1$ のとき、

$$\Gamma_0^{(1)} \xi_i = \mathbf{0} \quad (i=1, \dots, f) \quad (6)$$

を満たす線形独立なベクトル $\xi_1, \dots, \xi_f \in \mathbb{R}^{3n}$ が存在し、微小変形メカニズムモードとよばれる。式(4)の第1式を満たす \mathbf{X}'_0 は $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_f)^T$ を係数ベクトルとして以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_0 &= a_1 \xi_1 + \dots + a_f \xi_f \\ &= [\xi_1 \ \dots \ \xi_f] \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_f \end{pmatrix} \\ &= \bar{\mathbf{X}} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (7)$$

ここでは、トラスモデルの支持条件を考慮しないため、 ξ_1, \dots, ξ_f は6自由度の剛体変位自由度を常に含んでいる。よって、以下では $f \geq 7$ を仮定し、簡単のため ξ_1, \dots, ξ_{f-6} を剛体変位以外に対応するモード、その他を剛体変位に対応するモードとする。このとき、式(6)の a_1, \dots, a_{f-6} のうち少なくとも1つが非ゼロのものを非自明な \mathbf{X}'_0 とよぶ。一方、 $\Gamma_0^{(1)}$ の行数とランクの差

$$s = m - \text{rank}\Gamma_0^{(1)} \quad (8)$$

を不静定次数とよぶ。 $s \geq 1$ のとき、

$$\Gamma_0^{(1)T} \omega_i = \mathbf{0} \quad (i=1, \dots, s) \quad (9)$$

を満たす線形独立なベクトル $\omega_1, \dots, \omega_s \in \mathbb{R}^m$ が存在し、式(8)は外力が無い状態でのトラスモデルの各節点での力の釣合式を表している。式(1)、(8)より ω_i の各成分は部材の軸力密度 (軸力を初期長で割ったもの) を表しており、 ω_i を自己釣合軸力密度モードとよぶ。式(4)の第1式を満たす非自明な \mathbf{X}'_0 に対して式(4)の第2式を満たす \mathbf{X}''_0 が存在するのは、すべての ω_i に対して \mathbf{X}'_0 が次式を満たすときである。

$$\omega_i^T \Gamma_0^{(2)} (\mathbf{X}'_0) \mathbf{X}'_0 = 0 \quad (i=1, \dots, s) \quad (10)$$

式(9)は以下のように \mathbf{a} に関する斉次2次方程式に変形できる。

$$\mathbf{a}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{a} = 0 \quad (i=1, \dots, s) \quad (11)$$

ただし、 $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{f \times f}$ は、 ω_i の第 j 成分を $\omega_{i,j}$ としたとき、以下のように計算される行列である。

$$\mathbf{Q}_i = \sum_{j=1}^m \omega_{i,j} \bar{\mathbf{X}}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 c_j}{\partial X_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 c_j}{\partial X_1 \partial X_{3n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 c_j}{\partial X_{3n} \partial X_1} & \dots & \frac{\partial^2 c_j}{\partial X_{3n}^2} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{X}} \quad (12)$$

3. トラスモデルのメカニズムの分岐

xy 平面上の平坦なトラスモデルの微小変形メカニズムの解析を行う。式(6)、(7)を満たす微小変形メカニズムモードと自己釣合軸力密度モードを適切に与え、式(11)を満たす \mathbf{a} の解を求め、剛体折りメカニズムの分岐を示す。

3.1. ミウラ折りモデル

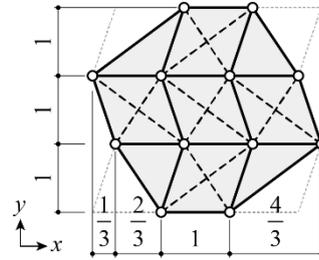


Fig.2 平坦なミウラ折りのトラスモデル (太破線は四辺形面の対角線方向の部材、四隅の細点線は省略した四辺形の一部)

Fig.2に示す xy 平面上のミウラ折りのトラスモデルを解析する。本来ミウラ折りは四辺形のみからなるが、四隅の頂点はメカニズムに影響しないため、ここでは省略する。剛体変位を除くと9個の微小変形メカニズムモードが存在し、その節点変位をFig.3のようにとる。図中の矢印は z 軸方向の変位を表し、いずれも大きさは1である。一方、自己釣合軸力密度モードはFig.4のようにとり、図中の数字は各部材の軸力密度を表す。このとき、2次の微小変形メカニズムの存在条件式は以下ようになる。

$$\begin{cases} 24a_1^2 - 12a_1a_2 - 8a_1a_4 + 6a_2a_4 - 2a_4^2 = 0 \\ 4a_1^2 + 6a_1a_3 + 6a_1a_5 + 6a_3a_5 + 2a_5^2 = 0 \\ 4a_1^2 + 6a_1a_6 + 6a_1a_8 + 2a_6^2 + 6a_6a_8 = 0 \\ 24a_1^2 - 8a_1a_7 - 12a_1a_9 - 2a_7^2 + 6a_7a_9 = 0 \\ a_1^2 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + a_2^2 - 2a_2a_3 + a_3^2 = 0 \\ a_1^2 - 2a_1a_4 + 2a_1a_6 + a_4^2 - 2a_4a_6 + a_6^2 = 0 \\ 4a_1^2 = 0 \\ a_1^2 + 2a_1a_5 - 2a_1a_7 + a_5^2 - 2a_5a_7 + a_7^2 = 0 \\ a_1^2 + 2a_1a_8 - 2a_1a_9 + a_8^2 - 2a_8a_9 + a_9^2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式(13)は b または b_1, b_2 を任意の変数として以下のように解ける。

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9) \\ & = (0, b_1, b_1, 0, 0, 0, 0, b_2, b_2), \\ & (0, b, b, 3b, 0, 3b, 0, -b, -b), \\ & (0, b, b, 0, -3b, 0, -3b, -b, -b), \\ & (0, b, b, 3b, -3b, 3b, -3b, -b, -b) \end{aligned} \quad (14)$$

よって、Fig.2の折線パターンは平坦状態から1種類の2自由度の経路 (Path 1) または3種類の1自由度の経路 (Path 2~4) のいずれかに分岐する。式(14)の4個の解に対応する節点変位はそれぞれFig.5のようになる。Path 1はx軸方向の折り線のみが折られ、2個のモードの合成によって表される。

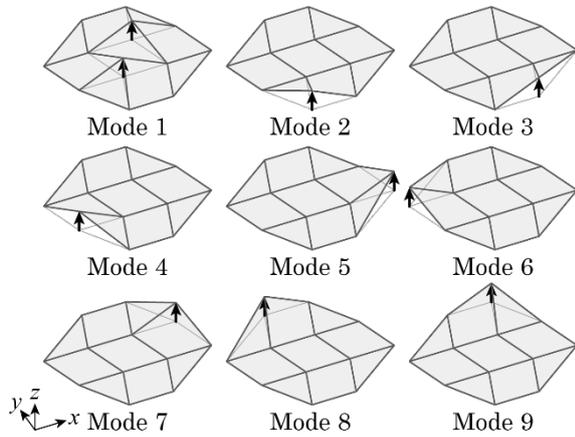


Fig.3 微小変形メカニズムモード
(四辺形面の対角線方向の部材は省略)

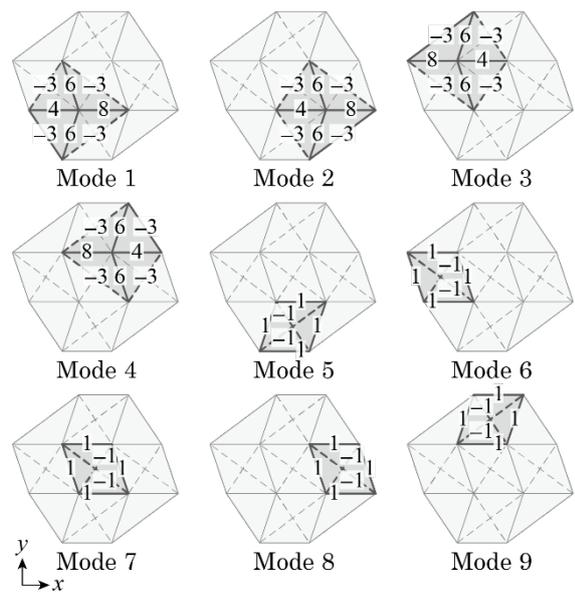


Fig.4 自己釣合軸力密度モード
(数字を記入していない部材の軸力密度は0)

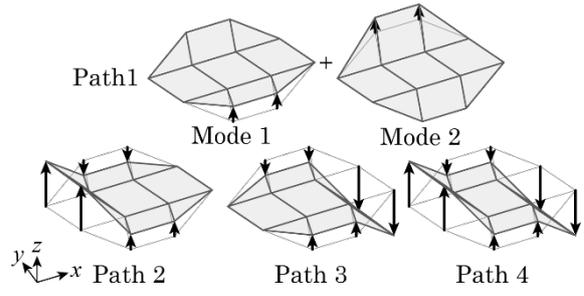


Fig.5 分岐経路

3.2. 渦巻き状ミウラ折りモデル

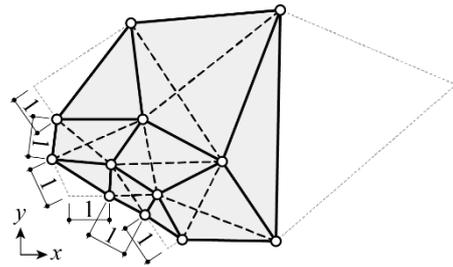


Fig.6 渦巻き状ミウラ折り⁶

伊藤ら⁶が提案したFig.6に示す渦巻き状ミウラ折りの解析を行う。3.1節と同様に四隅の頂点を省略して、非自明の微小変形メカニズムモードおよび自己釣合軸力密度モードをFig.7, 8のようにとる。このとき、2次の微小変形メカニズムの存在条件式は以下ようになる。

$$\begin{cases} -10.3a_1^2 + 6.47a_1a_2 + 3.98a_1a_4 - 0.530a_2^2 - 3.26a_2a_4 + 1.67a_4^2 = 0 \\ -3.29a_1^2 - 5.73a_1a_6 - 2.00a_1a_8 + 3.60a_6^2 - 7.07a_6a_8 + 0.865a_8^2 = 0 \\ 2.63a_1^2 + 4.25a_1a_3 + 2.31a_1a_5 + 0.922a_3^2 + 2.00a_3a_5 + 0.508a_5^2 = 0 \\ -12.4a_1^2 + 4.90a_1a_7 + 9.01a_1a_9 - 0.318a_7^2 - 2.27a_7a_9 - 1.29a_9^2 = 0 \\ -1.74a_1^2 + 3.94a_1a_2 - 2.87a_1a_3 - 2.22a_2^2 + 3.25a_2a_3 - 1.19a_3^2 = 0 \\ -0.832a_1^2 + 2.27a_1a_4 - 2.61a_1a_6 - 1.55a_4^2 + 3.57a_4a_6 - 2.05a_6^2 = 0 \\ -6.68a_1^2 = 0 \\ 2.04a_1^2 + 4.07a_1a_5 - 2.01a_1a_7 + 2.03a_5^2 - 2.00a_5a_7 + 0.493a_7^2 = 0 \\ -1.12a_1^2 - 3.71a_1a_8 - 2.00a_1a_9 - 3.08a_8^2 + 3.33a_8a_9 - 0.897a_9^2 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

各自己釣合軸力密度モードでの部材の軸力密度は数値計算で求めた。式(15)の第7式より $a_1 = 0$ であり、 a_2 を変数として残りの式を a_2 以外の係数について解くと以下ようになる。

$$\begin{aligned} & (a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9) \\ & = a_2 (1.37, -0.151, 0.571, -0.131, 1.16, -1.00, -1.86), \\ & \quad a_2 (1.37, 2.11, -5.96, 1.84, -12.1, 1.00, 1.86) \end{aligned} \quad (16)$$

よって、Fig.6に示す折線パターンは平坦状態から2種類の1自由度の経路のいずれかに分岐する。式(16)の2個の解に対応する分岐

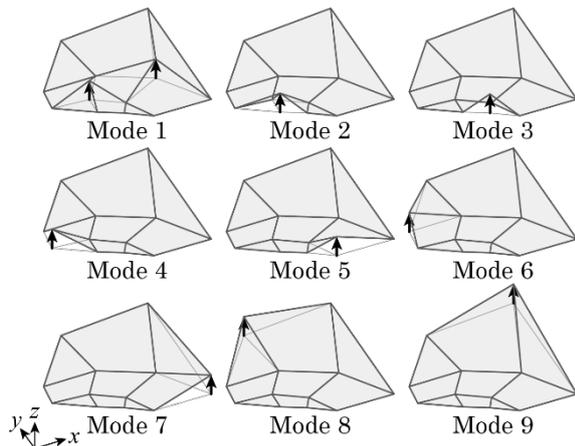


Fig.7 微小変形メカニズムモード

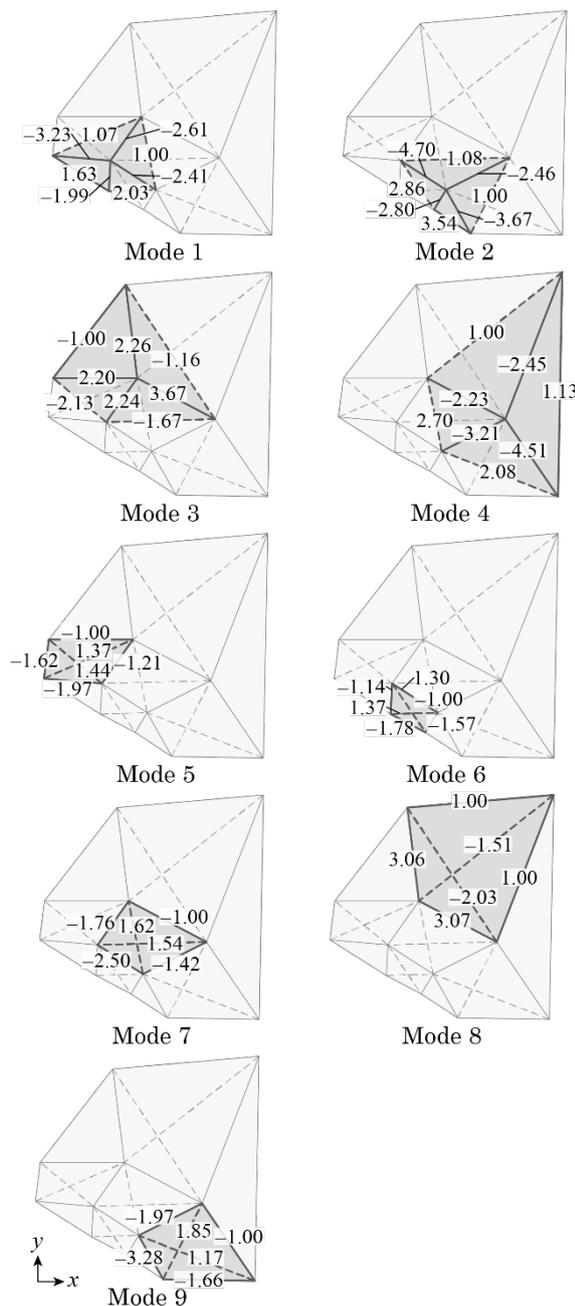


Fig.8 自己釣合軸力密度モード

経路はそれぞれ Fig.9 のようになる。

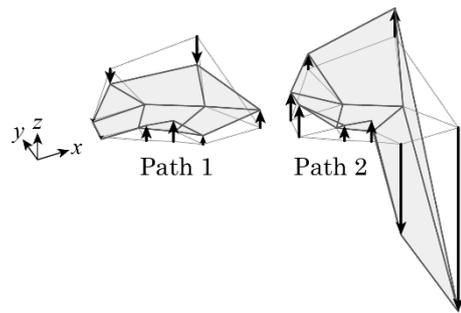


Fig.9 分岐経路

4. 結論

本稿では、平坦なミウラ折りと渦巻き状ミウラ折りについて2次の微小変形メカニズムの存在条件式を解き、分岐経路を示した。これらの例は同一の折り線の接続関係を持つが、分岐経路の数と自由度が異なることを示した。

謝辞

JPSP 科研費 JP23K19160 の助成を得た。

参考文献

- 1) M. Meloni et al., Engineering origami: A comprehensive review of recent applications, design methods, and tools, *Adv. Sci.*, Vol. 8 (2021) 2000636.
- 2) Y. Zhu, M. Schenk, and E.T. Filipov, A review on origami simulations: From kinematics, to mechanics, toward multiphysics, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 74 (2022) 030801.
- 3) B.G. Chen and C.D. Santangelo, Branches of triangulated origami neat the unfolded state, *Phys. Rev. X*, Vol. 8 (2018) 011034.
- 4) K. Hayakawa, T. Ohba, and M. Ohsaki, Analytical and numerical investigation of second-order infinitesimal mechanism in rigid origami, *Mech. Mach. Theo.*, Vol. 194 (2024) 105572.
- 5) P. Kumar and S. Pellegrino, Computation of kinematic path and bifurcation points, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 37 (2000) pp. 7003-7027.
- 6) 伊藤えみな, 田川浩之, 吉岡七海, 鈴木利友, 円弧状、渦巻き状ミウラ折りの建築設計への応用に向けて (その1) 円弧状、渦巻き状ミウラ折りの提案, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東) (2020) pp.913-914