ISSN 2186-5647

1-13

均質化法に基づく複合材梁の数値材料試験

日大生産工（非常勤）　○山中 耀介　　日大生産工　平山　紀夫
東北大・工　寺田賢二郎

1.　まえがき

均質化法[(1)(2)]は，複合材料のように非均質な微視的構造を有する非均質材料の力学的挙動を解析するために提案された手法である. 均質化法に基づくマルチスケール解析[(3)]は，非均質材料の変形や応力を予測する数値計算手法として, 有限要素法などの空間離散化手法と組み合わせて用いられてきたが, 従来の手法は連続体を主な対象としている. 梁状構造を対象とした均質化法を提案した先行研究[(4)~(6)]も存在するが, 断面の非一様なせん断変形を考慮した非均質なTimoshenko梁のマルチスケール解析手法はこれまでに提案されていない.

本研究では巨視的（マクロ）構造を梁上構造物として, 均質化法に基づくマルチスケール解析手法を提案する．提案手法を用いて，一方向繊維強化樹脂を積層した梁状構造物の数値シミュレーションを実施し, 結果から提案手法の性能について議論する．ここで，本研究では構成材料が全て線形弾性体な非均質材料を対象とする.

2.　複合材梁の２スケール問題

図１に示す, 中立軸方向に周期的なミクロ構造を有する梁の準静的な釣合い問題を微小変形理論の枠組みで考える. この非均質な梁と同じ寸法で, 均質体によって構成される梁をマクロ領域として$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$，周期的なミクロ構造を代表するユニットセルミクロ領域として$\boldsymbol{Y}$を用いて表す．さらにマクロ座標系を$\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$, ミクロ座標系を$\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)$と表す.

梁が図２のように変形するとき, 中立軸の変位を$\bar{\boldsymbol{u}}(x_1) = (\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3)$，断面と$x_1 - x_i$平面の角度を$\phi_i\,(x_1)$，$(i = 2, 3)$，中立軸のねじれ角を$\theta(x_1)$と表すと，中立軸の変位と角度は次のマクロ一般化変位によって表される.

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}(x_1) = \{\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3 \quad \theta \quad \phi_2 \quad \phi_3\}^{\mathsf{T}} \tag{1}$$

また, 任意断面におけるマクロ変位$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$およびマクロひずみ$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{x})$は次式で表される.

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 - x_2\phi_2 - x_3\phi_3 \\ \bar{u}_2 - x_3\theta \\ \bar{u}_3 + x_2\theta \end{Bmatrix} + \omega(x_2, x_3)\begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

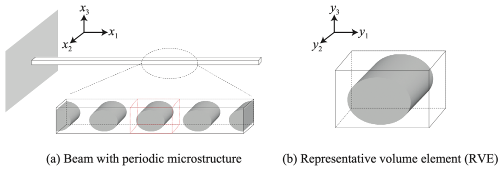

Fig.1　非均質梁の２スケール問題

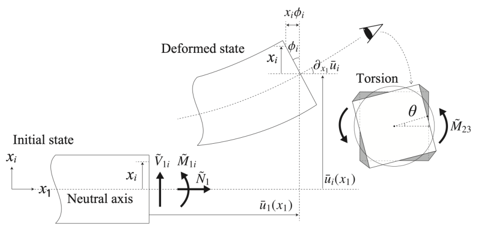

Fig.2　梁の変形

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} \tilde{E}_1 + x_2\tilde{E} + x_3\tilde{E} \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{E}_5 - x_3\tilde{E}_4 \\ 0 \\ \tilde{E}_6 + x_2\tilde{E}_4 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial_{x_2}\omega(x_2, x_3) \\ 0 \\ \partial_{x_3}\omega(x_2, x_3) \end{Bmatrix} \tag{3}$$

ここで，$\widetilde{\boldsymbol{E}}$はマクロ一般化ひずみであり,

$$\begin{aligned} &\widetilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{E}_1 \quad \tilde{E}_2 \quad \tilde{E}_3 \quad \tilde{E}_4 \quad \tilde{E}_5 \quad \tilde{E}_6\}^{\mathsf{T}}, \\ &\tilde{E}_1 = \partial_{x_1}u_1, \quad \tilde{E}_2 = \partial_{x_1}\phi_2, \qquad \tilde{E}_3 = \partial_{x_1}\phi_3, \\ &\tilde{E}_4 = \partial_{x_1}\theta, \quad \tilde{E}_5 = \partial_{x_1}u_2 - \phi_2, \quad \tilde{E}_6 = \partial_{x_1}u_3 - \phi_3, \end{aligned} \tag{4}$$

と定義した．$\partial_\circ\star$は$\star$の$\circ$に関する偏微分である. このとき，$\widetilde{\boldsymbol{E}}$の各成分は第一成分から順に，軸方向ひずみ，$x_1 - x_2$および$x_1 - x_3$平面内の曲率, ねじれ率, $x_1 - x_2$および$x_1 - x_3$平面内の剪断角に対応する．また，式(2)の$\omega(x_2, x_3)$は反り関数であり, αはサンブナンのねじり定数である.

断面x_1における一般化応力は軸力$\widetilde{N}$，曲げモーメント$\widetilde{M}_{12}, \widetilde{M}_{13}$，ねじりモーメント$\widetilde{M}_{23}$，および剪断力$\tilde{V}_{12}, \tilde{V}_{13}$で表される．これらを成分とするマクロ一般化応力ベクトル$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \equiv \{\widetilde{N} \quad \widetilde{M}_{12} \quad \widetilde{M}_{13} \quad \widetilde{M}_{23} \quad \tilde{V}_{12} \quad \tilde{V}_{13}\}$を用いると, マクロ支配方程式は次式で定義される.

$$\begin{cases} \partial_{x_1}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{U}} = \overline{\boldsymbol{U}} \text{ on } \partial_1\tilde{\Omega} \\ \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}} \text{ on } \partial_2\tilde{\Omega} \end{cases} \tag{5}$$

ここに，$\overline{\boldsymbol{U}}$, $\bar{\boldsymbol{t}}$はそれぞれDirichlet境界$\partial_1\tilde{\Omega}$とNeumann境界$\partial_2\tilde{\Omega}$における境界条件である. また，$\boldsymbol{n}$は法線ベクトルである.

Computational Homogenization for heterogeneous Beam

Yosuke YAMANAKA, Norio HIRAYAMA and Kenjiro TERADA

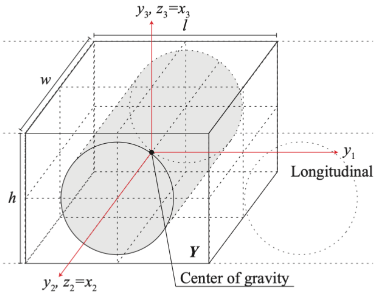

Fig. 3　ミクロ領域

図３は，ミクロ構造を代表するユニットセルであり，梁の中立軸方向，すなわちy_1方向に関して周期性に配置されていると仮定する．図に示すようにユニットセルの図心をミクロ座標系$\boldsymbol{y}$の原点として，ミクロ領域内のミクロ変位$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})$を次のように仮定する．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \tilde{\boldsymbol{z}}\tilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$
$$\text{where } \tilde{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3)$は座標系$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$と独立に定義する座標系であり，図3に示すように配置する．また．$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$は非均質性に起因して生じる擾乱変位である．ここで，ミクロ構造の周期性を考慮すると，向かい合う境界面$\partial Y^{[+1]}$と$\partial Y^{[-1]}$のミクロ変位には次の周期境界条件が課される．

$$\begin{cases} q_1 \equiv u_1^{[+1]} - u_1^{[-1]} = (\tilde{E}_1 + z_2\tilde{E}_2 + z_3\tilde{E}_3)l_1 \\ q_2 \equiv u_2^{[+1]} - u_2^{[-1]} = (\tilde{E}_5 - z_3\tilde{E}_4)l_1 \\ q_3 \equiv u_3^{[+1]} - u_3^{[-1]} = (\tilde{E}_6 + z_2\tilde{E}_4)l_1 \end{cases} \tag{7}$$

これにより，マクロな変形がミクロ変位に反映される．また，ミクロひずみは次式で表される．

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \tilde{\boldsymbol{z}}\tilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{\partial}_y\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{8}$$

ミクロスケールにおける応力$\boldsymbol{\sigma}$の釣合いは$\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$ で表される．しかし，この平衡方程式を周期境界条件のみを用いて解くと，ユニットセル全体の剛体回転が許容され，解が不定となる．そこで本研究では，以下の拘束を追加する．

$$\frac{1}{lwh}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \boldsymbol{\phi}\, dy_1\, dz_2\, dz_3 = 0,$$
$$\text{where } \boldsymbol{\phi} = \{z_2u_1 \quad z_3u_1 \quad z_2u_3 \quad z_3u_2\}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

これを用いて，ミクロスケールにおけるユニットセルの境界値問題を次式で定める．

$$\begin{cases} \boldsymbol{\partial}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{z}}\tilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{\partial}_y\boldsymbol{u}^* \end{cases} \quad \text{with Eqns. (4) and (6)} \tag{10}$$

$\boldsymbol{C}$はミクロ構成材料の弾性係数行列である．

最後に，２スケールの釣合いを共に満たす変位$\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}$は以下の支配方程式より求められる．

$$\int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathrm{T}}\delta\tilde{\boldsymbol{E}}d\Omega - \int_{\partial\Omega} \bar{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{T}}\delta\tilde{\boldsymbol{U}}d\partial\boldsymbol{\Omega} - \int_{\Omega} \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\delta\tilde{\boldsymbol{U}}d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

$$\int_{\Omega}\left\{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\,\delta\boldsymbol{\varepsilon} dy_1\, dz_2\, dz_3 + \frac{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}}{lwh}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \delta\boldsymbol{\phi}\, dy_1\, dz_2\, dz_3\right\} d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0} \tag{12}$$

$$\int_{\Omega}\left\{\frac{\delta\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}}{lwh}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \boldsymbol{\phi}\, dy_1\, dz_2\, dz_3\right\} d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

ここで，$\boldsymbol{\lambda}$は回転拘束(9)に関するLagrangeの未定乗数である．また，マクロ応力$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$，マクロひずみ$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$，およびマクロ一般化応力$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$とマクロ応力$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$の関係をそれぞれ以下のように定めた．

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \boldsymbol{\sigma}\, dy_1,\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}\, dy_1$$
$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\, dz_2\, dz_3 \tag{14}$$

3.　線形マルチスケール解析手法

前節で定式化した２スケール支配方程式を解く方法として，本研究では分離型手法(7)を採用し，以下の手順で数値計算を実施する．

i.　非均質梁のマクロな力学的挙動を表現可能なマクロ構成則を仮定
ii.　所定のマクロ変形をユニットセルに与えるミクロ解析（数値材料試験）を実施
iii.　数値材料試験で得られたマクロな挙動を用いてマクロ構成則のパラメータを同定
iv.　得られたパラメータとマクロ構成則を用いてマクロ解析を実施
v.　マクロ解析で得られたマクロひずみを用いてミクロ解析を実施し，ミクロ応力分布を算出（局所化解析）

本研究ではミクロ構成材料が全て線形弾性体と仮定する．その場合，マクロ一般化応力と一般化ひずみの構成関係は次式で与えられる．

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \tilde{\boldsymbol{D}}\tilde{\boldsymbol{E}} \tag{15}$$

$\tilde{\boldsymbol{D}}$は均質化された一般化剛性行列であり，その値は以下の６モードのマクロ一般化ひずみ

Mode 1: $\tilde{\boldsymbol{E}}^{(1)} = \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^{\mathrm{T}}$
Mode 2: $\tilde{\boldsymbol{E}}^{(2)} = \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^{\mathrm{T}}$
Mode 3: $\tilde{\boldsymbol{E}}^{(3)} = \{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^{\mathrm{T}}$
Mode 4: $\tilde{\boldsymbol{E}}^{(4)} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\}^{\mathrm{T}}$
Mode 5: $\tilde{\boldsymbol{E}}^{(5)} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^{\mathrm{T}}$
Mode 6: $\tilde{\boldsymbol{E}}^{(6)} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\}^{\mathrm{T}}$

をそれぞれ与える数値材料試験の結果として得られるマクロ一般化応力$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(1)}$，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(2)}$，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(3)}$，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(4)}$，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(5)}$，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(6)}$を用いて次式で表される．

$$\tilde{\boldsymbol{D}} = [\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(1)} \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(2)} \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(3)} \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(4)} \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(5)} \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(6)}]$$

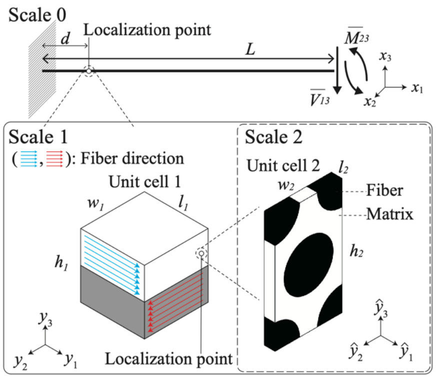

Fig. 4　FRP 製梁のマルチスケール問題

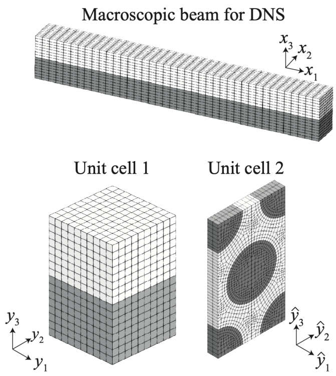

Fig. 5　有限要素モデル

4.　数値計算例

前節で示した手法を用いて，図4に示す一方向繊維強化樹脂を積層した梁状構造物のマルチスケール解析を実施する．この構造物を３スケールに分離し，以下の手順で解析を行う．

i.　Unit cell 2 (UC2)に対して従来法(7)の数値材料試験を実施し，Unit cell 1(UC1)の構成材料の弾性係数行列を同定する．

ii.　UC1に対して，本論文で提案した手法を用いて数値材料試験を実施し，均質で等価な梁の一般化剛性行列を同定する．

iii.　Scale 0におけるマクロな釣合い問題を，梁要素を用いて実施する．

iv.　マクロ問題を解いて得られたマクロ一般化ひずみを用いて，図3に示すLocalization point におけるミクロ応力分布を局所化解析によって算出する．

なお，各種寸法は表2に，UC2の構成材料の物性は表3にそれぞれ示すとおりである．提案手法の解を検証するため，UC1を直接配置した解析モデルを用いて Direct Numerical Simulation（以降，DNS）を実施し，解を比較する．提案手法およびDNSで用いる解析モデルはそれぞれ図5に示す通りである．

UC2に数値材料試験を実施して得られた均質化弾性係数行列は以下の通りである．

表 2　各種寸法

Beam [mm]	L	10.0	d	2.375		
UC1 [mm]	l_1	1.00	w_1	1.00	h_1	1.50
UC2 [-]	l_2	0.20	w_2	1.00	h_2	1.73

表 3　繊維と樹脂の物性

	Young's modulus	Poisson's ratio
Matrix	4.00 [GPa]	0.35 [-]
Fiber	220 [GPa]	0.30 [-]

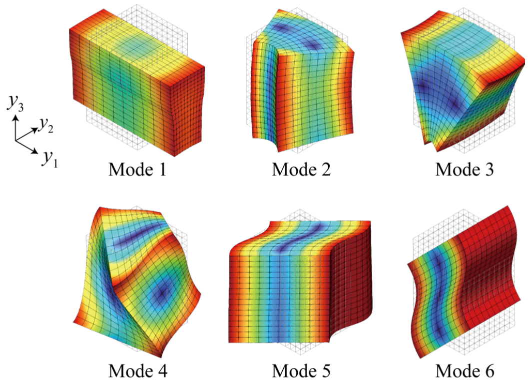

Fig. 6　Unit cell 1 の変形図

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 116 & 7.06 & 7.06 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & 14.9 & 7.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & & 14.9 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & & & 8.49 & 0.00 & 0.00 \\ & & & & 7.95 & 0.00 \\ \text{sym.} & & & & & 8.48 \end{bmatrix} [\text{GPa}]$$

これを用いて，提案手法によるUC1の数値材料試験を実施した．図6は変形図であり，Mode 1~6に対応した変形が与えられている．この結果から得られた剛性行列$\widetilde{\boldsymbol{D}}$を以下に示す．

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} 92.5 & 0.00 & 28.2 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & 7.71 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & & 17.3 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & & & 2.47 & -7.47\times 10^{-2} & 0.00 \\ & & & & 10.3 & 0.00 \\ \text{sym.} & & & & & 10.6 \end{bmatrix} [\text{GPa}]$$

この均質化剛性を用いて，提案手法によるマクロ解析を実施した．ここで，自由端に与える外力の大きさを$\overline{V}_{13} = 1.00$ [N], $\overline{M}_{23} = 1.50$ [N・mm]とした．また，DNSにも等価な外力を与え，解析を行った．図7は，結果として得られたDNSモデルの変形図であり，図8は，変形後における中立軸上の節点座標を$x_1 - x_3$平面上にプロットしたグラフである．グラフより，提案手法とDNSの結果は一致している．

マクロ解析によって得られたマクロ一般化ひずみを用いて，図4に示すLocalization point を実施して，断面内の応力分布を算出した．図9は，提案手法とDNSのそれぞれで得られたマクロ応力分布である．図より，両者の結果が一

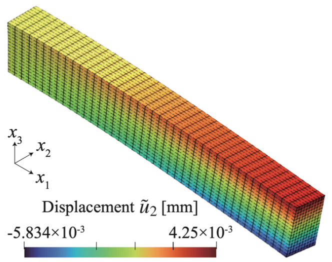

Fig. 7　DNS モデルの変形図

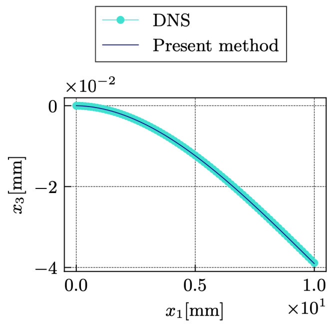

Fig. 8　DNS モデルの変形図

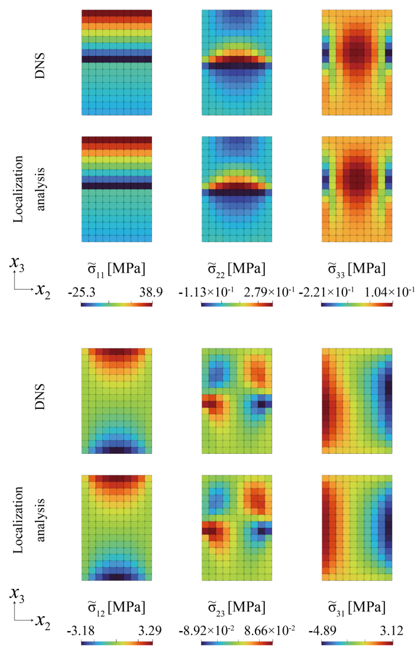

Fig. 9　マクロ応力分布

致していることが確認できる. 以上の結果から, 提案手法によって非均質な梁の任意断面における応力分布を予測可能なことが示された.

5.　まとめ

本研究では, 均質化法に基づく非均質梁の分離型線形マルチスケール解析手法を提案した. 具体的には, 均質化された等価な梁の一般化剛性行列を, ユニットセルに対するミクロ解析により算出する数値材料試験の方法を示した.

本研究の今後の課題は非線形問題への拡張である. 特に, 大変形問題を取り扱うための幾何学的非線形性と, 非弾性挙動を解析するための材料非線形性の考慮は, 複合材料製の梁状構造物の一般的な力学的挙動を表現する上で重要である. また, 提案手法では, ねじりに関する反り関数の影響を周期境界条件では考慮していないため, その影響を考慮することで改善が期待される.

参考文献

1) Robert M. Jones. Mechanics of Composite Materials, 2nd Edition. Taylor & Francis Ltd., 1999.
2) Richard M. Christensen. Mechanics of Composite Materials. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2005.
3) M. G. D. Geers, V.G. Kouznetsova, K. Matous, and J. Yvonnet, Homogenization methods and multiscale modeling: nonlinear problems, In E. Stein, R. de Borst, and T. J. R. Hughes, editors, Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition, Vol. 2: Solids and Structures, pp. 1–34. John Wiley & Sons, Ltd., 2 edition, 2017.
4) T. Kyoya and K. Terada. “Application of homogenization method to beam member with periodic structures”. 応用力学論文集, Vol. 1, pp. 185—194, 1998.
5) Tanguy Messager and Patrice Cartraud. Homogenization of helical beam-like structures: application to single-walled carbon nanotubes. Computational Mechanics, Vol. 41, pp. 335–346, 2007.
6) 斉木功, 鑓一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫. 非均質な Timoshenko 梁の平均物性評価. 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 68, No. 2, pp. I 161-I 169, 2012.
7) K. Terada, J. Kato, N. Hirayama, T. Inugai, and K. Yamamoto. A method of two-scale analysis with micro-macro decoupling scheme: application to hyperelastic composite materials. Computational Mechanics, Vol. 52, No. 5, pp. 1199–1219, 2013.