ISSN 2186-5647
－日本大学生産工学部第56回学術講演会講演概要（2023-12-9）－
6-5

無張力ボソン弦のツイスター形式とBRST量子化

日大生産工　○岡野　諭　　日大・量科研　出口　真一

1．はじめに

張力をもたない弦（無張力弦）はSchildによって初めて定式化され [1]，これまで様々な視点から研究されてきた [2, 3, 4, 5]．無張力弦を記述する作用として，特に次の2つが知られている．1つは，通常の時空変数を力学変数とするPolyakov作用の無張力極限である [2]．もう1つは，時空変数に余剰次元方向の成分を付加することで無張力弦がもつ共形共変性を明白にしたものである [3]．（この作用で記述される弦は共形弦ともよばれる．）これらの作用が記述する無張力弦を量子化すると，臨界次元の異なる複数の真空が現れる．共形弦に関しては，臨界次元が4次元となる真空が存在するが，この真空では余剰次元方向が特別視されるために，無張力弦の量子状態の共形共変性は不明瞭となる [4]．

本研究では，4次元ミンコフスキー時空を伝播する無張力弦の作用として，ツイスターで記述される作用（論文 [5] 参照）を出発点に取り，無張力弦の量子論的性質を調べる．ツイスターは共形群の基本表現であるため，作用の共形不変性は明白であり，余剰次元成分を導入する必要は無い．量子化の際は，量子状態の共形共変性が明白となる真空を採用する．この真空に基づいて定まるBRST電荷の性質を調べることで，作用がもつ対称性が量子化した後も維持されることを確かめる．

2．無張力ボソン弦のツイスター形式

無張力ボソン弦のラグランジアン密度は，ツイスター変数 $Z^A(\xi)$ $(A=0,1,2,3)$ とその共役変数 $\bar{Z}_A(\xi)$ を用いて次式で与えられる [5]：

$$\mathcal{L}_Z=\frac{i}{2}\Big(\bar{Z}_A\dot{Z}^A-Z^A\dot{\bar{Z}}_A\Big)+\frac{i}{2}\lambda\Big(\bar{Z}_A\acute{Z}^A-Z^A\acute{\bar{Z}}_A\Big)+\varrho\bar{Z}_AZ^A\,,\quad\left(\dot{f}:=\frac{\partial f}{\partial\xi^0},\ \acute{f}:=\frac{\partial f}{\partial\xi^1}\right).\tag{1}$$

ここで $(\xi^i)=(\xi^0,\xi^1)$ は世界面のパラメータ，$\varrho(\xi)$ は世界面上のU(1)ゲージ場，$\lambda(\xi)$ は補助場である．世界面パラメータの付け替え $\delta\xi^i=-\epsilon^i(\xi)$ $(|\epsilon^i|\ll 1,\ i=0,1)$ のもとで各変数は

$$\delta_\epsilon Z^A=\epsilon^i\partial_iZ^A+\frac{1}{2}(\acute{\epsilon}^1-\dot{\epsilon}^0)Z^A\,,\tag{2a}$$

$$\delta_\epsilon\bar{Z}_A=\epsilon^i\partial_i\bar{Z}_A+\frac{1}{2}(\acute{\epsilon}^1-\dot{\epsilon}^0)\bar{Z}_A\,,\tag{2b}$$

$$\delta_\epsilon\lambda=\epsilon^i\partial_i\lambda+(\dot{\epsilon}^0-\acute{\epsilon}^1)\lambda-\dot{\epsilon}^1+\acute{\epsilon}^0\lambda^2\,,\tag{2c}$$

$$\delta_\epsilon\varrho=\epsilon^i\partial_i\varrho+(\dot{\epsilon}^0+\acute{\epsilon}^0\lambda)\varrho\tag{2d}$$

と変換する．一方，各変数の局所U(1)変換則は $Z^A\to e^{i\theta}Z^A$, $\bar{Z}_A\to e^{-i\theta}\bar{Z}_A, \varrho\to\varrho+\dot{\theta}+\lambda\acute{\theta}$, $\lambda\to\lambda$ $(\theta=\theta(\xi)\in\mathbb{R})$ と与えられる．式(1)から定まる作用 $S_Z=\int d^2\xi\mathcal{L}_Z$ は，世界面パラメータの付け替えと局所U(1)変換のもとで不変である．

3．BRST変換とゲージ固定作用

ゴースト場 $c^i(\xi)$, 反ゴースト場 $\gamma_i(\xi)$, NL場 $\beta_i(\xi)$ を導入し，式(2)に対応するBRST変換を定義する：

$$\boldsymbol{\delta}Z^A=c^i\partial_iZ^A+\frac{1}{2}\big(\acute{c}^1-\frac{1}{2}\acute{c}^0\lambda\big)Z^A\,,\tag{3a}$$

$$\boldsymbol{\delta}\bar{Z}_A=c^i\partial_i\bar{Z}_A+\frac{1}{2}\big(\acute{c}^1-\frac{1}{2}\acute{c}^0\lambda\big)\bar{Z}_A\,,\tag{3b}$$

$$\boldsymbol{\delta}\lambda=c^i\partial_i\lambda-\dot{c}^1+(\dot{c}^0-\acute{c}^1)\lambda+\acute{c}^0\lambda^2\,,\tag{3c}$$

$$\boldsymbol{\delta}\varrho=c^i\partial_i\varrho+(\dot{c}^0+\acute{c}^0\lambda)\varrho\,,\tag{3d}$$

$$\boldsymbol{\delta}c^i=c^j\partial_jc^i\,,\quad\boldsymbol{\delta}\gamma_i=i\beta_i\,,\quad\boldsymbol{\delta}\beta_i=0\,.\tag{3e}$$

以上の準備のもと，ゲージ固定条件として，世界面パラメータの付け替えに対して $\lambda=0$ を，局所U(1)変換に対して $\varrho=1$ を採用する．このとき，ゲージ固定項 $\mathcal{L}_{\rm GF}$ は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm GF}&:=-i\boldsymbol{\delta}\{\gamma_0(\varrho-1)-\gamma_1\lambda\}\\&=i\gamma_1\{c^i\partial_i\lambda+i\gamma_0\{c^i\partial_i\varrho+(\dot{c}^0+\acute{c}^0\lambda)\varrho\}\\&\qquad+\beta_1\lambda-\dot{c}^1+(\dot{c}^0-\acute{c}^1)\lambda+\acute{c}^0\lambda^2\}\,.\end{aligned}\tag{4}$$

ゲージ固定項を加えた作用 $S:=\int d^2\xi(\mathcal{L}_Z+\mathcal{L}_{\rm GF})$ はBRST変換(3)のもとで不変である．この不変性に基づくネーターカレント $j^i_{\rm B}$ より，BRST電荷 $Q_{\rm B}:=\int d\xi^1j^0_{\rm B}$ が次のように得られる：

$$Q_{\rm B}=\int d\xi^1\left[\frac{i}{2}c^1(\bar{Z}_A\acute{Z}^A-Z^A\acute{\bar{Z}}_A)-c^0\bar{Z}_AZ^A-ic^1\acute{c}^0\gamma_0+ic^1\acute{c}^1\gamma_1\right].\tag{5}$$

以下では閉弦を議論の対象とし，作用 S に基づく正準形式を論じる．

4．正準形式とBRST量子化

正準座標 $Z^A,\bar{Z}_A,\lambda,\varrho,c^i,\gamma_i,\beta_i$ に対する共役運動量を $\Pi_A,\bar{\Pi}^A,\Pi_\lambda,\Pi_\varrho,\Pi_{ci},\Pi^i_\gamma,\Pi^i_\beta$ と表す．Diracの手法に従い，共役運動量の定義から定まる全ての拘束条件を第1類と第2類に分類する．結果として，

Twistor formulation and BRST quantization of a tensionless bosonic string

Satoshi OKANO and Shinichi DEGUCHI

全ての拘束条件は第 2 類に分類される．これらを用いて Dirac 括弧 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{D}}$ を定義すると，特に正準変数同士の Dirac 括弧が次のように求まる：

$$\{Z^A(\xi^1), \bar{Z}_B(\tilde{\xi}^1)\}_{\mathrm{D}} = -i\delta^A_B\delta(\xi^1-\tilde{\xi}^1)\,, \tag{6a}$$

$$\{c^0(\xi^1), \gamma_0(\tilde{\xi}^1)\}_{\mathrm{D}} = -i\delta(\xi^1-\tilde{\xi}^1)\,, \tag{6b}$$

$$\{c^1(\xi^1), \gamma_1(\tilde{\xi}^1)\}_{\mathrm{D}} = i\delta(\xi^1-\tilde{\xi}^1)\,. \tag{6c}$$

他の正準変数間の Dirac 括弧は 0 となる．これらの Dirac 括弧を用いると，Q_{B} は BRST 変換 (3) を生成することがわかる．

以上で構成した正準形式をもとに，次の手順で量子化を行う．まず，正準変数を演算子に置き換え，Dirac 括弧 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{D}}$ を正準（反）交換関係 $[\cdot,\cdot]_{\pm} = i\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{D}}$ に置き換える．次に，BRST 電荷 Q_{B} を用いて，物理的状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ を定める条件 $Q_{\mathrm{B}}|\mathrm{phys}\rangle = 0$ を設定する．この手続きにより，式 (6) から次の（反）交換関係を得る：

$$\left[Z^A_n, \bar{Z}_{B,m}\right]_- = \delta^A_B\delta_{n+m,0}\,, \tag{7a}$$

$$\left[c^0_n, \gamma_{0m}\right]_+ = \delta_{n+m,0}\,, \tag{7b}$$

$$\left[c^1_n, \gamma_{1m}\right]_+ = -\delta_{n+m,0}\,, \quad m, n \in \mathbb{Z}\,. \tag{7c}$$

但し，$Z^A_n, \bar{Z}_{A,n}, c^i_n, \gamma_{i,n}$ はそれぞれ $Z^A, \bar{Z}_A, c^i, \gamma_i$ のフーリエ係数である．一方，物理的状態を定めるために必要な Q_{B} の表式は，そこに含まれる演算子の順序に依存して決まる．以下では，正規順序を採用した場合と Weyl 順序を採用した場合を考える．

まず，正規順序の BRST 電荷を定めるために，真空 $|0\rangle$ を次のように選ぶ：

$$Z^A_n|0\rangle = 0, \quad \gamma_{i,n}|0\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{8}$$

この真空に基づいて決まる正規順序の BRST 電荷を $Q_{\mathrm{B(N)}}$ と表すとき，式 (5) から，次の表式が得られる：

$$Q_{\mathrm{B(N)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0,1} c^i_n L^i_{-n} \quad . \tag{9}$$

但し，$L^0_n \coloneqq -\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \bar{Z}_{A,n-m}Z^A_m$，$L^1_n \coloneqq \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \{ (m-n/2)\bar{Z}_{A,n-m}Z^A_m - m(c^0_m\gamma_{0,n-m} - c^1_m\gamma_{1,n-m}) \}$ である．式 (7) より，L^0_m, L^1_m は次の代数を満たす：

$$[L^0_m,\, L^0_n]_- = 0\,, \qquad [L^0_m,\, L^1_n]_- = mL^0_{m+n}\,,$$

$$[L^1_m,\, L^1_n]_- = (m-n)L^1_{m+n}\,. \tag{10}$$

式 (10) から，BRST 電荷の冪零性 $Q^2_{\mathrm{B(N)}} \equiv (1/2)[Q_{\mathrm{B(N)}}, Q_{\mathrm{B(N)}}]_+ = 0$ が導かれる．

次に，Weyl 順序を採用した場合を考察する．式 (5) より，この場合の BRST 電荷 $Q_{\mathrm{B(W)}}$ の表式として次式を得る：

$$Q_{\mathrm{B(W)}} = Q_{\mathrm{B(N)}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}c^0_0\alpha\,, \quad \alpha \coloneqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1\,. \tag{11}$$

右辺に現れる α は，（反）交換関係を用いて Z^A_n と $\bar{Z}_{A,n}$ の積の順序を入れ替える際に生じる．ゼータ関数 $\zeta(s) \coloneqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ の $s=0$ における値は $\zeta(0) = -1/2$ と正則化されるので，同時に $0^0 = 1$ を採用すると $\alpha = 2\zeta(0) + 1 = 0$ が得られる．よって式 (11) は

$$Q_{\mathrm{B(W)}} = Q_{\mathrm{B(N)}}$$

となる．こうして，真空 (8) のもとでは，正規順序と Weyl 順序の BRST 電荷は一致し，いずれの場合でも BRST 電荷の冪零性が満たされる．

5．まとめと今後の課題

本研究では，ツイスターで記述される無張力弦のラグランジアン密度 (1) から出発し，それにゲージ固定項 (4) を加えて定まる作用 S に基づいて，4 次元ミンコフスキー時空を伝播する無張力弦を量子化した．その結果，真空を式 (8) のように選ぶ場合には，正規順序を採用した場合と Weyl 順序を採用した場合の BRST 電荷 Q_{B} が一致することがわかった．また，いずれの順序を採用した場合でも冪零性 $Q^2_{\mathrm{B}} = 0$ が成立し，作用 S_Z がもつ対称性が量子化された後でも保たれることがわかった．この結果は，共形弦を量子化した際に，臨界次元が 4 次元となる真空が現れることと整合している．また，共形弦で採用される真空は共形共変性が明白ではないのに対し，本研究で採用した真空 (8) では共形共変性が明白である．

今回得られた結果に基づいて，物理的状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ の具体的な形を求めることが喫緊の課題である．

参考文献

[1] A. Schild, Classical Null Strings, Phys. Rev. D 16 (1977) 1722.
[2] J. Isberg, U. Lindström, B. Sundborg, and G. Theodoridis, Classical and Quantized Tensionless Strings, Nucl. Phys. B 411 (1994) 122.
[3] H. Gustafsson, U. Lindström, P. Saltsidis, B. Sundborg, and R. von Unge, Hamiltonian BRST Quantization of the Conformal String, Nucl. Phys. B 440 (1995) 495.
[4] S. Hwang, R. Marnelius, and P. Saltsidis, A General BRST Approach to String Theories with Zeta Function Regularizations, J. Math. Phys. 40 (1999) 4639.
[5] S. Deguchi, T. Egami, and J. Note, Spinor and Twistor Formulations of Tensionless Bosonic Strings in Four Dimensions, Prog. Theor. Phys. 124 (2010) 969.