

磁場閉じ込めプラズマ乱流における特異値分解を用いた輸送現象の解析

日大生産工（学部）○古田原 拓実 日大生産工 佐々木 真

1. 背景

乱流は物質混合や輸送能力が非常に高く、時空間構造を持つ現象に普遍的である。時空間構造を持つ現象には、気象現象や大気、海洋汚染などが例として挙げられる。これらの予測、物理研究は現代科学の最先端のテーマとなっている。このような現象の発展を支配する乱流輸送は物質と渦運動との結合によって起こる。そのため、これらを解析することで、時空間構造を持つ現象を理解することができる。

本研究では、核融合プラズマの乱流構造を解析対象とし、乱流により輸送される物質の粒子密度と流れの特徴を同時に理解することを目指す。特徴分析方法には様々な方法があり、その一つとして特異値分解(SVD)を用いる方法がある。従来の研究では、粒子密度揺動と流れ揺動の特徴を別々に解析していた。^{1) 2)}しかし、乱流輸送は、両揺動の共通構造が重要となるため、特異値分解を両揺動の組み合わせに対して行う必要がある。

2. 解析手法：特異値分解(SVD)

特異値分解は m 行 n 列の行列 A に対して行うことで以下のようにあらわすことが出来る。

$$A = U\Sigma V^T \quad (1)$$

ここで U を左特異値行列 (m 行 m 列)、 V を右特異値行列 (n 行 n 列) と呼ぶ。どちらも正規直行列である。また、 Σ は特異値行列 (m 行 n 列) と呼ばれ、対角成分に $\sigma_1 \sim \sigma_k$ まで降順で並べられる ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_m \geq 0$)。 σ_i は特異値と呼ばれ、この大きさはもとの行列 A に対する寄与の大きさで決まる。^{2) 3)}

観測データ $\Phi(x, t)$ は一般に

$$A_{ij} = \Phi(x_i, t_j) \quad (1)$$

と置くことで 2 次元の行列で記述することが可能である。行列 A に特異値分解を行うことを考える。 A は空間方向を x 方向、時間方向を t 方向に持つ。この特異値分解の結果は、時間に依存しない空間構造を持つ行列 U と空間に依存しない時間発展をもつ行列 ΣV^T が出力される。各行列の結果は、時空間構造を反映させた特徴を持つモードに対応している。SVD はフーリエモード分解と同様に直交基底に基づくモード分解になっている。³⁾

解析対象とする磁場閉じ込めプラズマ乱流から得られた粒子密度と流れの時系列データをそれぞれ行列 N と行列 Vr とする。従来の研究では、 N または Vr に対してのみ SVD を行っていたが、本研究では二つの行列を空間方向に結合させ、SVD を行うことで両揺動の共通構造を抽出する。式(2)は単一物理量に対する SVD、式(3)は本研究で提案する同時 SVD を示している。このように SVD を二つの異なる物理量に対して行う手法を同時特異値分解と呼ぶことにする。

$$N_{m_1 n} = U_{m_1 k} \Sigma_{kk} V_{kn}^T \quad (2)$$

$$(N + Vr)_{(m_1+m_2)n} = U_{(m_1+m_2)n} \Sigma_{kk} V_{kn}^T \quad (3)$$

3. 解析データ

本研究では、解析対象データとして九州大学にある直線磁化プラズマ装置 PANTA (Plasma Assembly for Nonlinear Turbulence Analysis) から得られたデータを扱う。PANTA では、周方向に粒子密度と電位を計測するプローブが 32 本 (32ch) ずつ、計 64 本のプローブが交互に設置されている。⁴⁾ これにより、得られた密度揺動と電位から評価した径方向の流れ揺動のデータを使用する。

Analysis of transport in magnetized turbulent plasma
by using singular value decomposition
Takumi KODAHARA and Makoto SASAKI

4. 同時 SVD による輸送解析

乱流の密度揺動と流れ揺動の時系列データに対して同時 SVD を行うことで共通構造を抽出する。また、両揺動の支配構造から、乱流駆動による輸送を評価する。

4.1 SVD による乱流のモード分解

図 1 のように密度揺動と流れ揺動の時系列データを空間方向に結合させ、同時特異値分解を行った。出力された特異値を図 1 に示す。

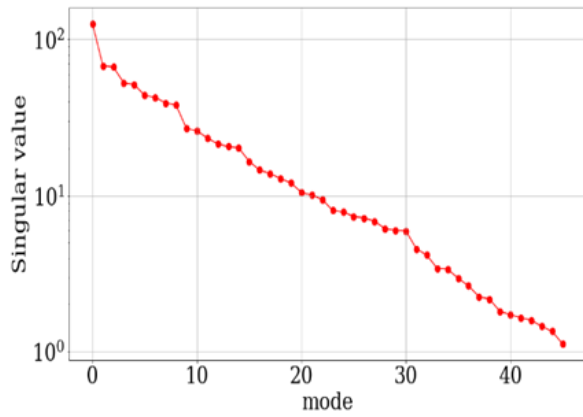


図 1 同時 SVD で得られた特異値スペクトル

特異値 σ_k をもつモード k を降順に mode k と定義した。これを見ると特異値が 10^2 以上の支配的な mode0 が存在し、mode1~14 では、特異値が近い値をとるペア mode が存在することが分かる。mode k での揺動 X_k は式(4)のように表せることから、ペア mode を式(5)と定義する。

$$X_k = U_{ik} \Sigma_{kk} V_{kj}^T \quad (4)$$

$$X_{k,k+1} = X_k + X_{k+1} \quad (5)$$

支配 mode とペア mode それぞれの密度揺動、流れ揺動を図 2 に示す。支配 mode に関して、密度では、周方向に連続な揺動を示しており、流れ揺動では、ある空間での時間的变化をしていないことが分かる。ペア mode に関して、両揺動で Ch No. の大きい方から小さい方へ伝播する構造を持っており、これは揺動がプラズマの周方向に伝播していることに対応する。モード毎に周波数や波数が異なっていることが分かる。このように同時特異値分解を行うことで、密度揺動と流れ揺動の共通する特徴を抽出することが出来た。

4.2 乱流駆動による輸送

乱流の輸送は、ある面を通過する粒子の数によって評価できる。ある位置での粒子密度を n 、粒子の流れの速さを v とすると、微小時間 Δt に微小面積 ΔS を通過した粒子数 Γ_r は、次のように求められる。⁴⁾

$$\Gamma_r = nv \quad (6)$$

これを空間方向、時間方向で平均をとる。

$$\langle \bar{\Gamma}_r \rangle = \langle \bar{n} \bar{v} \rangle \quad (7)$$

すると、空間全体での粒子の平均の輸送を評価することが出来る。式(7)から次のように輸送を評価する。

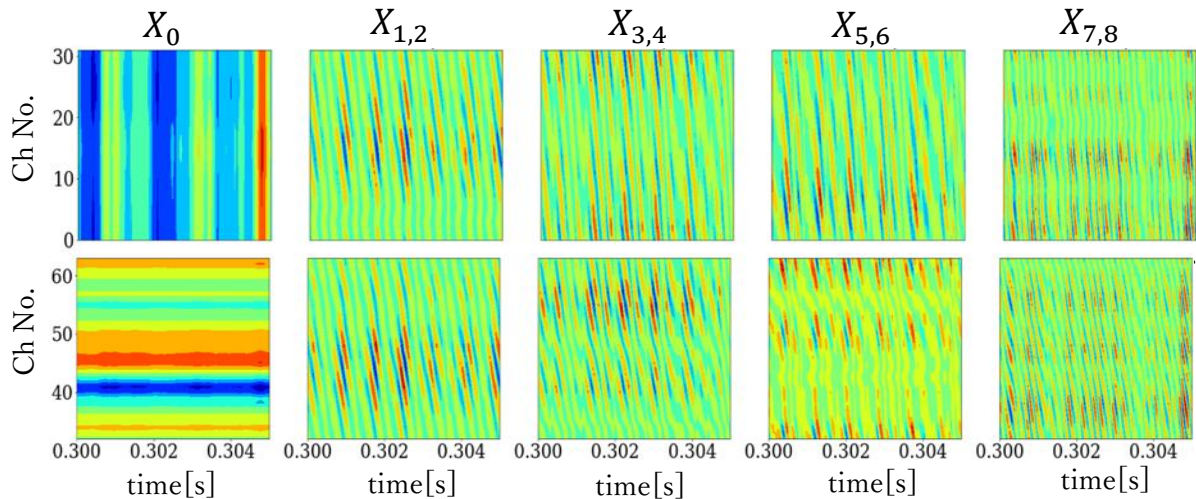


図 2 密度揺動(上段)、流れ揺動(下段) : mode0 の揺動 X_0 、ペア mode の揺動 $X_{k,k+1}$

$$\langle \bar{r} \rangle = \langle \bar{N}_\alpha \bar{V} r_\beta \rangle \quad (8)$$

α と β を変化させ、式(8)での輸送の様子を図3に示す。これを見ると、違う mode 同士での輸送はほとんど見られず、同じ mode 同士の輸送で構成されていることが分かる。これはSVDのモード直行性に起因する。

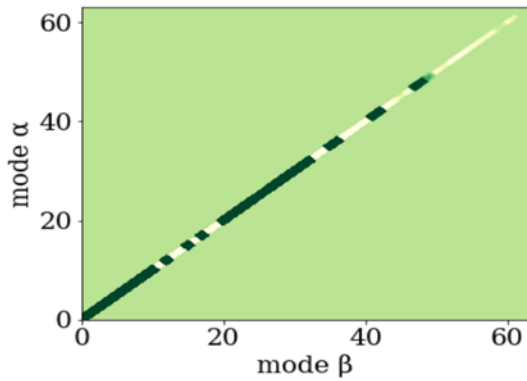


図3 SVD後の密度揺動の mode α と流れ揺動の mode β を変化させたときの輸送の特徴

次に、 $\alpha = \beta$ についての挙動を図4に示す。正の値をとる mode は空間全体で粒子が径方向に対して外向きに輸送されていることを表し、負の値をとる mode では内向きの輸送を表している。図4において正の値をとる mode が多いことから、乱流による輸送の平均は、空間全体で外向きであることが分かる。このようにSVDを用いて輸送の特徴を抽出することに成功した。

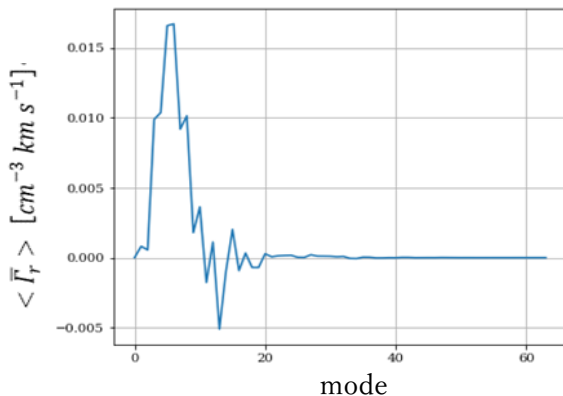


図4 $\alpha = \beta$ のときの輸送の挙動

5. まとめ

本研究では、乱流構造の特徴分析の方法として用いられてきた特異値分解を拡張し、二つの異なる物理量を同時解析する同時特異値分解を提案した。磁場閉じ込めプラズマの乱流構造を対象に同時特異値分解による密度揺動と径方向の流れ揺動における共通構造を得ることが出来た。また、抽出された両揺動を基に粒子輸送の評価を行った。輸送は同一モードの結合のみで表されていることを確認した。モードに応じて粒子輸送の向きが異なることも分かった。本研究で提案した同時SVDを用いることで少数自由度に落としたモード分解が可能となり、そのモードが駆動する輸送まで得ることが出来ることを示した。

参考文献

- 1) 西野信博、大舘暁、「講座高速カメラを利用した磁場閉じ込めプラズマ計測」, J. Plasma Fusion Res, Vol.86, No.11, (2010), pp.648-653
- 2) Kobayashi, T., Sasaki, M., Ido, T., KAmiya, K., Miura, Y., Ida, K., & Itoh, K. "Behavior of geodesic acoustic mode and limit-cycle oscillation approaching LH transition in JFT-2M tokamak.", Plasma Physics and Controlled Fusion, 64, 114002 (2022)
- 3) 朝比祐一、藤井恵介、「データ駆動アプローチを用いた雪崩的乱流輸送現象の解析」, J. Plasma Fusion Res. Vol.97, No.2, (2021), pp. 86-92
- 4) Takuma Yamada, "Anatomy of plasma turbulence", Nature physics, (2008), pp721-725
- 5) Kin, F., et al., "Observations of radially elongated particle flux induced by streamer in a linear magnetized plasma." *Physics of Plasmas* 26.4 (2019), 042306.