

トーラス上のフェルミオンについて

日大生産工 ○岡野 諭 筑波大・医 神田 直大

1. はじめに

グラフェンシートは炭素原子 1 個の厚さをもつ膜状物質であり、その上では近似的に無質量ディラック方程式で記述される電子状態が実現されることが知られている。シート形状に誘起される様々な特徴的な伝導現象を示す特異な物質であることから、物性分野において盛んに研究されている [1]。実際に合成されたグラフェンの形状には、球、円筒、トーラスなどがある [2]。

こうした曲面上のディラック方程式系は、物性物理だけではなく、量子力学における曲がった空間の影響を調べる対象としても興味深い [3]。本講演では、トーラス面に拘束されたフェルミオンの従うディラック方程式を解く試みについて、我々の現状を報告する。

2. 曲がった時空におけるディラック方程式

曲がった 1 + 2 次元時空における無質量フェルミオンのディラック方程式は

$$\bar{\gamma}^\mu (\partial_\mu + \Omega_\mu) \Psi = 0, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表される。ここで $\mu = 0, 1, 2$ であり、繰り返し現れる添字については和を取るものとする。また、 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ であり、曲がった時空におけるガンマ行列 $\bar{\gamma}^\mu$ とスピン接続 Ω_μ は次のように定義される：

$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^a e_a^\mu, \quad (2)$$

$$\Omega_\mu = \frac{1}{4} \gamma_a \gamma_b e^a{}_\lambda g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu e^b{}_\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda e^b{}_\lambda). \quad (3)$$

ここで γ_a ($a = 0, 1, 2$) は局所ローレンツ系のガンマ行列であり、 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ はクリストッフェル記号である：

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}). \quad (4)$$

三脚場 $e^a{}_\lambda$ は、時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ に対して次式を満たす：

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}, \quad g^{\mu\nu} = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \eta^{ab}, \quad (5)$$

$$e^a{}_\mu e_a{}^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad e_{a\mu} e^{c\mu} = \delta_a^c \quad (6)$$

ここで $\eta_{ab} = \eta^{ab} = \text{diag}(+, -, -)$ は局所ローレンツ系の計量テンソルである。

3. トーラス面上のディラック方程式

トーラス面は次の曲面の方程式を満たす 3 次元空間の点の集合として定義される：

$$\left(\sqrt{X^2 + Y^2} - R\right)^2 + Z^2 = r^2, \quad 0 < r < R \quad (7)$$

ここで R は大円の半径であり、 r は小円の半径である。トーラス面 (7) は媒介変数 x^1, x^2 ($0 \leq x^1, x^2 < 2\pi$) を用いて以下のように表せる：

$$X = (R + r \cos x^1) \cos x^2 \quad (8a)$$

$$Y = (R + r \cos x^1) \sin x^2 \quad (8b)$$

$$Z = r \sin x^1 \quad (8c)$$

ミンコフスキー時空の線素は

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \quad (9)$$

で与えられる。ここで c は光速である。以下では $c = 1$ とする。上式に、トーラス面の媒介変数表示 (8) を代入すれば、時間方向とトーラス曲面から成る (1 + 2) 次元時空の計量が得られる：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (10)$$

ただし、 $\mu = 0, 1, 2$ である。また、 $g_{\mu\nu}$ は、トーラス面上に誘導される計量テンソルで

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

であり、 $\mathcal{R}$ を

$$\mathcal{R} := R + r \cos x^1 \quad (12)$$

と定義した。

式 (11) より、クリストッフェル記号 (4) の 0 でない成分が

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{r^2} \mathcal{R} \mathcal{R}' = \frac{\mathcal{R}}{r} \sin x^1, \quad (13)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} = -\frac{r \sin x^1}{\mathcal{R}} \quad (14)$$

と求まる。ただし、 $\mathcal{R}' := \partial \mathcal{R} / \partial x^1$ である。また、式 (5) より、三脚場 $e^a{}_\mu$ とその逆行列 $e_a{}^\mu$ はそれぞれ

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix}, \quad e_a{}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mathcal{R}} \end{pmatrix} \quad (15)$$

となる．これらを式 (2) と (3) に代入すれば，曲がった時空におけるガンマ行列 $\bar{\gamma}^\mu$ と局所ローレンツ系のガンマ行列 γ^a の関係

$$\bar{\gamma}^0 = \gamma^0, \quad \bar{\gamma}^1 = \frac{1}{r}\gamma^1, \quad \bar{\gamma}^2 = \frac{1}{\mathcal{R}}\gamma^2 \quad (16)$$

と，スピン接続 Ω_μ ($\mu = 0, 1, 2$) が得られる：

$$\Omega_0 = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{\mathcal{R}'}{2r}\gamma_1\gamma_2. \quad (17)$$

いま，パウリ行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を用いて，局所ローレンツ系のガンマ行列 γ^a の表示を次のようにとる：

$$\begin{aligned} \gamma^0 &:= \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 := i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &:= i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

式 (16), (17), (18) より，計量が (10) で与えられる時空におけるディラック方程式 (1) は次のように書き下せる：

$$\partial_0\phi = -\frac{1}{r}\partial_1\psi - \frac{i}{\mathcal{R}}\partial_2\psi - \frac{\mathcal{R}'}{2r\mathcal{R}}\psi, \quad (19a)$$

$$\partial_0\psi = -\frac{1}{r}\partial_1\phi + \frac{i}{\mathcal{R}}\partial_2\phi - \frac{\mathcal{R}'}{2r\mathcal{R}}\phi. \quad (19b)$$

4. 変数分離

微分方程式 (19) の解として，変数分離形を仮定し

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = e^{iEx^0} e^{ikx^2} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(x^1) \\ \tilde{\psi}(x^1) \end{pmatrix} \quad (20)$$

とおく．ただし E, k は定数である．これを式 (19) に代入すれば

$$iE\tilde{\phi}(x^1) = -\left(\frac{1}{r}\partial_1 - \frac{k}{\mathcal{R}} + \frac{\mathcal{R}'}{2r\mathcal{R}}\right)\tilde{\psi}(x^1), \quad (21a)$$

$$iE\tilde{\psi}(x^1) = -\left(\frac{1}{r}\partial_1 + \frac{k}{\mathcal{R}} + \frac{\mathcal{R}'}{2r\mathcal{R}}\right)\tilde{\phi}(x^1). \quad (21b)$$

を得る．式 (21a) と式 (21b) を連立して $\tilde{\phi}$ を消去することで， $\tilde{\psi}(x^1)$ に対する 2 階の微分方程式

$$\begin{aligned} -E^2\tilde{\psi} = & \left[\frac{1}{r^2\mathcal{R}}\partial_1(\mathcal{R}\partial_1) - \frac{k^2}{\mathcal{R}^2} + k\frac{\mathcal{R}'}{r\mathcal{R}^2} \right. \\ & \left. + \frac{\mathcal{R}''}{2r^2\mathcal{R}} - \frac{\mathcal{R}'^2}{4r^2\mathcal{R}^2} \right]\tilde{\psi} \end{aligned} \quad (22)$$

が得られる．式 (22) は複雑な形をしているが，変換

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}(x^1) \\ \tilde{\psi}(x^1) \end{pmatrix} = \mathcal{R}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} u(x^1) \\ v(x^1) \end{pmatrix} \quad (23)$$

を施すことにより， v に関する 1 階微分項を含まない微分方程式に帰着する：

$$v'' - \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}(k^2 - R'k)v + (rE)^2v = 0. \quad (24)$$

同様に，式 (21) から $\tilde{\psi}$ を消去して得られる $\tilde{\phi}$ に関する 2 階微分方程式は，変換 (23) によって，次の形に帰着する：

$$u'' + \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}(k^2 + R'k)u + (rE)^2u = 0. \quad (25)$$

変換 (23) により，式 (21) は， v の満たす式 (24) および u の満たす式 (25) に帰着されたが，解が知られている微分方程式と比較して解を決定するには至っていない．これと同様の状況が，トーラス上に拘束された非相対論的な電子のパウリ方程式からも導かれる [4]．

5. まとめと今後の課題

本稿では，時空計量が式 (11) で与えられる 2 次元トーラス面上の無質量フェルミオンのディラック方程式を具体的に書き下し，得られた方程式を取り扱いやすい形に変形するために，変数分離および変換 (23) を試みた．

また，我々の得た式 (22) に相当する Belonenko らの計算結果 (Ref. [5] の式 (9) の下の式) を再現する目的で，局所ローレンツ系のガンマ行列の表示として式 (18) を採用した．しかしながら，ガンマ行列の表示は物理的内容に影響を与えないため，他の表示を採用した場合のディラック方程式の具体形を調べることが課題の 1 つに挙げられる．実際，曲がった時空におけるディラック方程式を解く手法として，ガンマ行列に対するユニタリー変換を活用した研究がある [6]．一方，曲がった時空のディラック方程式の摂動論的解法として，フェルミ座標系を利用する手法 [7] が知られており，トーラスの場合に対してこの手法を適用することも，今後の課題に挙げられる．

参考文献

- [1] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim, Rev. Mod. Phys. 81 (2009) 109.
- [2] R. Martel, H.R. Shea, P. Avouris, J. Phys. Chem. B. 103 (1999) 7551.
- [3] A. Iorio, G. Lambiase, Phys. Rev. D 90 (2014) 025006.
- [4] A.G.M. Schmidt, Phys. E. 110 (2019) 88.
- [5] M.B. Belonenko, N.G. Lebedev, N.N. Yanyushkina, A. V. Zhukov, M. Paliy, Solid State Commun. 151 (2011) 1147.
- [6] H. Panahi and L. Jahangiri, Ann. Phys. 354, (2015) 306.
- [7] L. Parker, Phys. Rev. D. 22 (1980) 1922.