ISSN 2186-5647

5-5

制約付き最適化を用いた３次ベジェ曲線の形状制御

日大生産工(院)　○田部井　直人　　日大生産工　吉田　典正

1.　はじめに

CAD等,デザインにおいてベジェ曲線は広く用いられている.デザイナにとって望ましいデザインの実現のために美しい曲線の生成は重要である.

本研究では,美的曲線を曲率対数グラフが直線となるような曲線と定め,曲率対数グラフがほぼ直線になるような3次ベジェ曲線を生成する手法を作成する.両端点の位置と接線方向を固定した状態で，曲率対数グラフ制約付き最適化を用い,曲率対数グラフが直線になるようにベジェ曲線の形状を変化させることで,美的曲線の生成を行った.

2.　曲率単調変化と条件

曲率は曲線の曲がり具合を示す量である.曲線のある点の近傍を円弧で近似した時,円の半径を曲率半径といい,その逆数を曲率という.3 次ベジェ曲線$(\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^2)$ $(0 \leq t \leq 1)$において,曲率κは,

$$\kappa(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{x}} \wedge \ddot{\boldsymbol{x}}}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^3} \tag{1}$$

で計算できる.

美的曲線の定義の一つに,「曲線はその曲率グラフが連続で数少ない単調な部分からなる時に美しい」[1]というものがあり,これは曲率κに極値がなく単調変化で連続であることを意味する.

曲線$(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2)$が単調変化となる条件は,弧長を$s$として,

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{(\dot{\boldsymbol{x}} \wedge \dddot{\boldsymbol{x}})}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^4} - 3\boldsymbol{x}\ddot{\boldsymbol{x}}\frac{(\dot{\boldsymbol{x}} \wedge \ddot{\boldsymbol{x}})}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^6} \tag{2}$$

の分子部分が常に正ならば単調に増加し,負ならば単調に減少する.

3.　曲率対数グラフ

曲率対数グラフは,和歌山大学の原田らによって示された,「美しい曲線の多くはその曲率対数グラフが直線で表される」[2,3]という指摘に基づくものである.曲率対数グラフが直線で表される曲線を,対数美的曲線と呼ぶ。

曲率半径をρ,曲率を$\kappa(=1/\rho)$,弧長をsで表す.曲率対数グラフは縦軸を$\log(\rho|ds/d\rho|)$,横軸を$\log\rho$で表されるグラフである.ρがsに対し単調に増加する場合,曲率対数グラフの直線性はaを直線の傾き,cを定数としたとき,

$$\log\left(\rho\frac{ds}{d\rho}\right) = a\log\rho + c \tag{3}$$

によって表される.曲率対数グラフの縦軸$\log(\rho|ds/d\rho|)$は,

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{1}{\kappa^2}\frac{d\kappa}{ds} \tag{4}$$

を用いて求めることができる.

4.　制約付き最適化

美的曲線を生成するため,3 次ベジェ曲線を対象とし,両端点の位置と接線方向を固定し,制約付き最適化を用いて曲率対数グラフが最も直線に近づく制御点の位置を見つける.

3 次ベジェ曲線の制御点を$\boldsymbol{P}_i(0 \leq i \leq 3)$,変更する制御点は$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$の２つとする.

変数をT_0とT_1,両端点からの接線方向の交点を$\boldsymbol{P}_C$とし,変更後の制御点$\boldsymbol{P}_1', \boldsymbol{P}_2'$を以下のように設定する.

$$\boldsymbol{P}_1' = T_0(\boldsymbol{P}_C - \boldsymbol{P}_0) + \boldsymbol{P}_0 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{P}_2' = T_1(\boldsymbol{P}_C - \boldsymbol{P}_3) + \boldsymbol{P}_3 \tag{6}$$

この時、$\boldsymbol{P}_1', \boldsymbol{P}_2'$はそれぞれ隣接する端点との直線上を移動する.目的関数を最小化するような,P_1', P_2'を求める.目的関数は,ベジェ曲線のパラメータtを n 点に細分化し,$t_i = \frac{i}{n-1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$, $[\,]_{t_i}$を$t = t_i$で評価した値とした時,

$$min\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\left[\log\left(\rho\frac{ds}{d\rho}\right)\right]_{t_i} - [a\log\rho_i + b]_{t_i}\right\}^2\right) \tag{7}$$

とする.式(7)が下に凸の2次式であることから最小になる時のbは,式(7)をbで偏微分して求めることができ,

$$b = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\left[\log\left(\rho\frac{ds}{d\rho}\right)\right]_{t_i} - [a\log\rho_i + b]_{t_i}\right\}}{n} \tag{8}$$

となる.制約条件は,

$$0 \leq T_0 \leq 1, \qquad 0 \leq T_1 \leq 1 \tag{9}$$

である.

この時、式(7)が0に近づくことは,傾きaの時に曲率対数グラフがより直線に近づくことを意味するため、式(7)の最小化により対数美的曲線に近似できる.

Shape Control of Cubic Bézier Curves using Constrained Optimization

Naoto TABEI and Norimasa YOSHIDA

5.　結果

プログラムの作成にはC++言語を用い，描画にはGUIライブラリのQt[4]を，最適化には非線形最適化ライブラリのnlopt[5]を用いた．曲率対数グラフの傾きaはユーザが指定し,曲線上の点のサンプリング数は$n = 1000$とした．図1は最適化前の結果であり，図2, 図3, 図4は,それぞれ$a = 1, 0.7, 1.2$に最適化した結果である．

最適化前では，式(7)の値は635.104であった．$a = 1, 0.7, 1.2$に最適化した場合，式(7)の値は7.121, 0.054, 36.804であり，実際の曲率対数グラフの傾きは0.994, 0.701, 1.137であった．このことより，3次多項式ベジエ曲線は$a = 0.7$の対数美的曲線が最もよく近似できていることがわかる．このように,与えられた曲線の両端点の位置と接線方向を固定し，$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$の制御点を両端点の接線方向を維持したまま移動させ、曲率対数グラフが直線に近くなるように曲線を生成した．

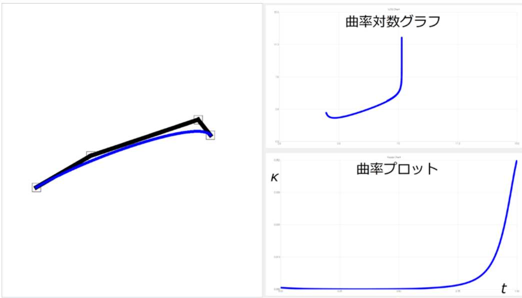


図1　最適化前

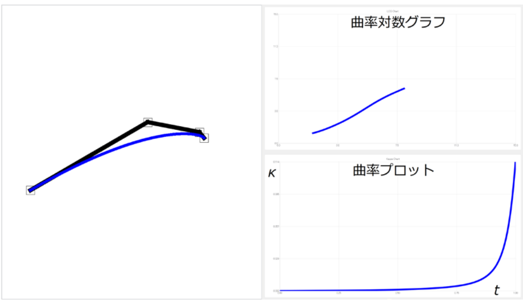


図2　最適化後($a = 1$)

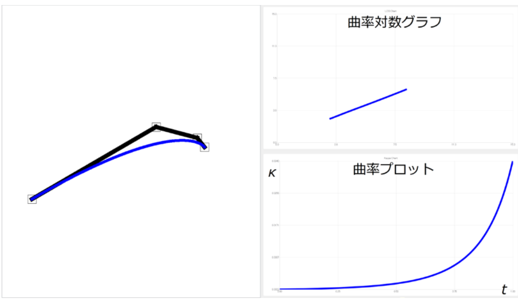
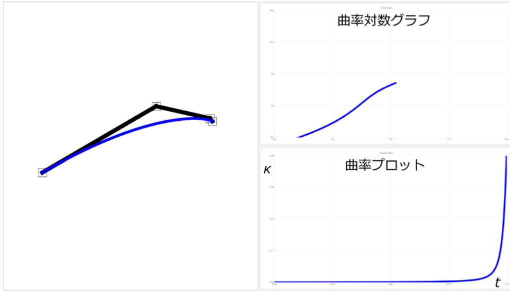


図3　最適化後($a = 0.7$)



4　最適化後($a = 1.2$)

今後の課題としては，目的関数が最小になっても美的曲線とならない場合があり，曲線の表現能力自体に問題がるのか，最適化の収束計算が正しくいない可能性もある．また,初期値によっては局所解にとどまり,望まし結果が得られないこともある.どのように望ましい初期値を見つけるのかも重要な課題の一つである．

6.　まとめと今後の展望

3次ベジエ曲線が与えられたときに，両端点の位置と接線方向を固定し，曲率対数グラフがほぼ直線となるように形状変形する手法を提案した．提案手法をC++言語を用いたプログラムとし実装した．本研究により3次多項式ベジエ曲線はaが0.7付近の対数美的曲線を最もよく近似できるという結果が得られた．

,移動する制御点がそれぞれ隣接した端点との直線上に望ましい座標が存在しない条件の解明と,最適化を実行する際に与える初期値を決定する方法の検討,制約付き最適化を用いて複数個の制御点を持つ3次B-spline曲線への応用を検討していく．

参考文献

) Gerald Farin: CAGDのための曲線・曲面理論 実践利用法, 1991.

2) N. Yoshida, R. Fukuda, T. Saito, Logarithmic Curvature and Torsion Graphs, in Mathematical Methods for Curves and Surfaces 2008 edited by Daehlen et al., LNCS 5862, Springer, pp.434-443, 2010.

3) Harada, T., Yoshimoto, F., Moriyama, M.: An aesthetic curve in the field of industrial Design. In Proceedings of IEEE Symposium on Visual Languages, 38–47(1999)

4) https://www.qt.io/ja-jp/

5) https://nlopt.readthedocs.io/en/latest/NLopt_Tutorial/