ISSN 2186-5647

5-4

3次多項式Bézier曲線の曲率単調領域の可視化

日大生産工(院)　○櫻井　成哉　日大生産工　吉田　典正

1.　まえがき

美しい曲線形状のデザインには，望まれる領域において曲線の曲率変化が単調(曲率単調)であることが重要1)である．製品設計で使用するCADシステムで利用される自由曲線は，曲率単調な曲線の探索には手間がかかる問題がある．従来の手法2)では曲率単調な領域(曲率単調領域)を可視化するために，第4の制御点の位置を様々に変化させる全探索により，曲率変化が単調となる領域を可視化した．本研究では，曲率単調領域の境界をより効率的に構築する手法を提案する．

2.　標準形による制御点の指定

本研究では，3次多項式Bézier曲線3)の制御点の一般性を失うことなく，Fig.1のような標準形の制御点とする．

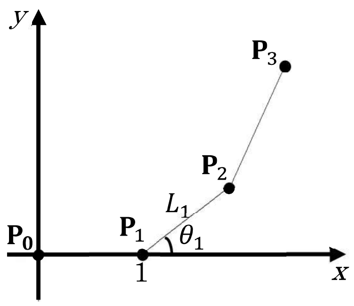
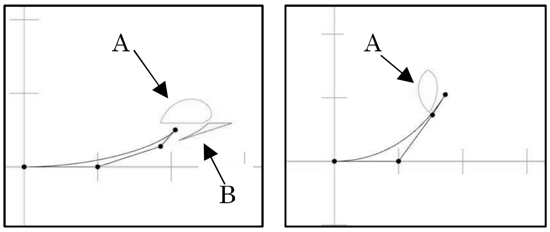


Fig.1 3次多項式Bézier曲線の制御点の配置

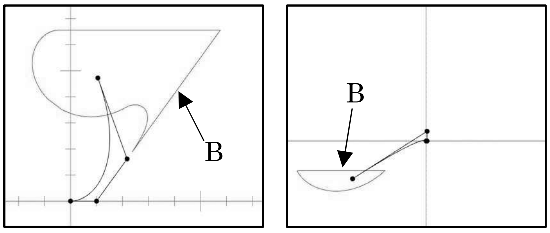
標準形では，$\mathbf{P}_0 = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{P}_1 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$である．$\theta_1$を$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$と$x$軸のなす角とし、$L_1 = |\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|$とする．$\mathbf{P}_2 = [1 + L_1 \cos\theta_1 \quad L_1 \sin\theta_1]$であるので，$L_1$と$\theta_1$の２つのパラメータによって$\mathbf{P}_2$を指定することができる．多項式曲線は，回転および平行移動をしても曲率が変化しないという性質，および$s(\neq 0)$倍の拡大・縮小をした場合に曲率は$1/s$倍になるという性質があるため，L_1とθ_1および$\mathbf{P}_3$のみで，任意の3次多項式Bézier曲線を表現することができる．本研究では，L_1とθ_1を様々に変化させた場合に，曲率変化が単調となる（曲率が0をまたぐ場合も除く）$\mathbf{P}_3$の領域の可視化を行う．

3.　従来の手法での曲率単調領域の可視化

従来の手法2)では曲率単調領域を可視化するために，L_1とθ_1を決定し$\mathbf{P}_3$を様々に変化させる全探索により，曲率単調領域の境界の可視化を行った(Fig.2)．その結果大きく分けて4パターンの曲率単調領域が確認できた．



(a) $L_1 = 0.9,\ \theta_1 = \frac{1}{10}\pi$　(b) $L_1 = 0.9,\ \theta_1 = \frac{3}{10}\pi$



(c) $L_1 = 2.0,\ \theta_1 = \frac{3}{10}\pi$　(d) $L_1 = 10.0,\ \theta_1 = \frac{5}{10}\pi$

Fig.2 従来の手法での曲率単調領域

Fig.2において，曲率単調領域A内に$\mathbf{P}_3$が存在する場合，曲線の曲率は単調増加となる．また，曲率単調領域B内に$\mathbf{P}_3$が存在する場合，曲線の曲率は単調減少となる．(a)の曲率単調領域Aでは領域の下側が直線形状であり，(a), (c), (d)の曲率単調領域Bでは上側が直線形状となることがわかる．(a), (c)の曲率単調領域Bでは右側が直線形状となっている．

4.　曲率単調領域の構築手法

本研究では，従来の手法で得られた曲率単調領域の特徴を用いて，曲率単調領域の境界をpixel単位で探索し曲率単調領域を可視化する手法を提案する．本研究では，Fig.2　(a),(c),(d)の領域の可視化を行う．まず，境界のpixelを探索するために，探索の開始点座標を見つける．

Fig.2 (a),(c)の曲率単調領域Bの開始点座標を求める．従来の手法から得られた曲率単調領域の下側もしくは上側が直線形状である特徴は，

Visualization of the monotonic curvature region in cubic polynomial Bézier curves

Seiya SAKURAI,　Norimasa YOSHIDA

$d\kappa/ds$の分子を5次Bézier曲線で表現した(ξ_0~ξ_5)[4)]のξ_0を$\mathbf{P}_3$のy座標について解くことで求められる．また，曲率単調領域の右側が直線形状であるのは$\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1$の直線よりも$\mathbf{P}_3$が$x$軸に近い場合に曲率が0をまたぐことから，曲率単調領域の右側の直線形状は$\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1$の延長上にある．開始点の$x$座標は，$\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1$の延長直線に$\xi_0$から求めた$y$座標を代入して得られる．

Fig.2 (a)の曲率単調領域AとFig.2 (d)の曲率単調領域Bでは，ξ_0から求めたy座標を持つx軸と平行な直線上に曲率単調領域の境界が存在する．x座標は，$\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1$の延長直線に$\xi_0$から求めた$y$座標を代入して得られる$x$座標よりも小さい．この点から1 pixel左に移動させ曲率単調の判定を行う．この操作を指定された回数を上限（本研究では1000回としている）として繰り返すことで，最初に曲率単調と判定されたpixelを開始点座標とする．一度も曲率単調と判定されなかった場合には曲率単調領域は存在しないとする．

始点座標（最初は開始点座標）から曲率単調領域の境界を探索する手順として，開始点座標のpixelの周囲8 pixelに$\mathbf{P}_3$を配置して曲率単調の判定を行い，判定結果から曲率単調領域の境界を沿うように次のpixelを決定する．決定したpixelを始点座標として，この操作を繰り返し行う．始点座標が開始点座標の周囲1 pixelに到達したら探索を終了する．次のpixelを決定する主要な方法を(1)から(7)に示す．Fig.3の黒塗りの部分が始点座標とし，状況に応じて(1)から(7)を適切に利用することにより境界を構築する．

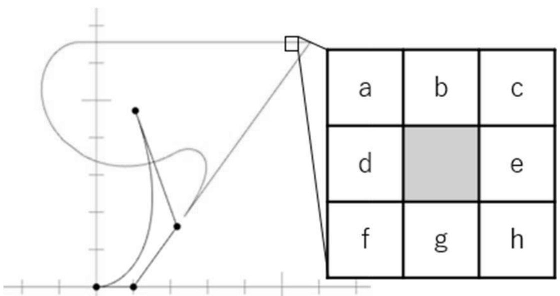
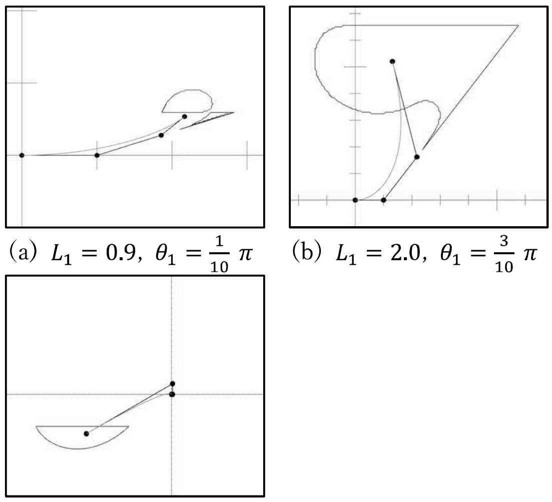


Fig.3 次のpixelを決定するための8pixel

(1) a,b,cが曲率単調でなくdが曲率単調のとき次のpixelをdとする
(2) a,d~hが曲率単調のとき次のpixelをaとする
(3) dが曲率単調ではなくeが曲率単調のとき次のpixelはf,g,hのうち曲率単調である最も左のpixelとする
(4) f, g, hが曲率単調でなくeが曲率単調のとき次のpixelはeとする
(5) a~e,hが曲率単調のとき次のpixelはhとなる
(6) eが曲率単調でなくdが曲率単調のとき次のpixelはa,b,cのうち曲率単調である最も右のpixelとなる
(7) d,eが曲率単調でないとき次のpixelはa,b,cのうち曲率単調である最も右のpixelとなる

提案手法による探索によって可視化した曲率単調領域をFig.4に示す．Fig.4の結果ではFig.2 (a),(c),(d)とほぼ同じ領域が得られており，求められた領域内では曲率単調性を維持していることを確認した．



(a) $L_1=0.9$, $\theta_1=\frac{1}{10}\pi$　(b) $L_1=2.0$, $\theta_1=\frac{3}{10}\pi$

(d) $L_1=10.0$, $\theta_1=\frac{5}{10}\pi$

Fig.4 pixelによる探索での曲率単調領域

5. まとめ

本研究では3次多項式Bézier曲線の標準形の制御点に対して，$\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$が与えられた場合に曲率変化が単調となる$\mathbf{P}_3$の領域の境界を構築する手法提案した．今後，Fig.2 (b)のような曲率単調領域の境界の構築や，更なる効率的な可視化手法を検討するとともに，曲率単調領域に関する理論的な解明も行っていく予定である．

参考文献

1) G. Farin, Class A Bézier curves, CAGD, 23(7), pp.573-581, (2006)
2) 櫻井成哉，吉田典正，3次多項式Bézier曲線が曲率単調となる領域の可視化，映情学技報，vol. 45, no. 8, AIT2021-84, pp.189-190, (2021)
3) 宮崎大輔，床井浩平，結崎修，吉田典正：“コンピュータグラフィックの基礎”，5章，オーム社, (2020)
4) Yulin Wang, Bingyan Zhao, Luzou Zhang, Jiachuan Xu, Kanchang Wang, Shuchun Wang, Designing fair curves using monotone curvature pieces, Computer Aided Geometric Design, (2004)