

ケインズ美人投票と最尤加重 DAP

日大生産工(非常勤) ○篠原 正明

情報システム研究所 篠原 健

1. はじめに

ケインズ美人投票とは、イギリスの経済学者ケインズ(1883-1946)が、玄人筋の行う株式投資を、投資家本人の主観ではなく、他の投票者の好み、平均値(average opinion)、に最も適合と思われる、より客観的な、美人の写真を選択する事に例えた投資理論である。美人決定の認知過程として、美人代替案間の一対比較に基づく動的平均化プロセス(DAP: Dynamic Averaging Process)を考え、そこに未知なる美人投票の優勝者を尤もらしく選択するメカニズムを組み込んだ最尤加重 DAP (MLW-DAP: Most Likely Weighted Dynamic Averaging Process)を提案する。既存経済理論でのケインズ美人投票は適切な仮定下(同質な投票者・意思決定者)では、自己循環論法あるいは多数決認知型のゲーム論モデルに帰着するが、本論で提案する最尤加重型美人投票においては、美人代替案間の一対比較データを所与として、平均的な投票者の好みに適合する美人投票＝群集心理のメカニズムの数理モデルを提起する。2章では一対比較に基づく認知過程としての最尤加重 DAP を説明し、3章で整合性が有る場合、4章で整合性が無い場合について考察する。5章で数値計算例を示すが、整合性が悪いと振動して収束しない、など不安定な過渡特性が観察される(市場の不安定性)。なお、付録1ではケインズの有効需要論(と価値観の多様性・美人投票・豊穡の中の貧困)と最尤 DAP との関係性について述べる。

2. 美人投票の認知過程としての最尤加重 DAP

美人投票の候補者を N 人とする。群集心理の代弁者を意思決定者としよう。美人代替案 i の美人代替案 j に対する選好度一対比較値を a_{ij} とし、美人決定の認知過程が基本 DAPに従うと仮定すると、美人代替案 k の t 時点の選好度重み $x_k(t)$ は更新式(2.1)で表現できる。 $x_k(t) = \sum a_{kj} x_j(t-1)/N$ (2.1) 但し、基本 DAP とは、(2.1)に示す完全情報下の均等加重・算術平均に基づく最単純な認知過程である。この基本 DAP は単純明快であるが、美人投票のように、より複雑な現実の認知過程の表現には不適切であろう。例えば、代替案 k の選

好度重み $x_k(t)$ を代替案 j から見た代替案 k の部分選好度重み $a_{kj} x_j(t-1)$ ($j=1,2,3,\dots,N$)、総計 N 個、の単純な算術平均として評価するが、平均的な投票者の好みに最も合致と思う美人を選択するということは、更新式(2.1)において、何らかの加重 w_{kj} による加重算術平均(2.2)がより適切であろう(但し、加重ベクトル $\{w_{kj}\}$ には総和=1 の正規化条件; $\sum_j w_{kj}=1$ (2.3)が付加)。これが加重 DAP(w-DAP)である。

$$x_k(t) = \sum_j w_{kj} a_{kj} x_j(t-1) \quad (2.2)$$

それでは、その加重 w_{kj} を如何に設定すればよいのか？ 一つの考え方が、「代替案 k の代替案 j から見た部分の加重 w_{kj} として、未知数の代替案 k の選好度重み x_j とする! $w_{kj} = x_j$ (2.4)」である。(2.4)を(2.2)に代入すると、基本最尤加重 DAP(x-DAP): $x_k(t) = \sum_j a_{kj} x_j(t-1)^2$ (2.5)を得る。代替案 j との比較をどれだけ考慮するかの程度に、(DAP 反復中の時点では未決定だが、最も尤もらしい)代替案 j の選好度重み x_j を直接採用する。理由：選好度重みが便益性指標ならば、重要度の増加に重要度荷重が比例増加すると考えられるので。ところで、便益性指標ならば重要度の増加に重要度荷重が比例増加すると考えられるが、費用性指標ならば逆に重要度の増加と共に重要度荷重は減少すると考えられる。この点を考慮して、 p 乗荷重指標: $w_{kj} = x_j^p$ (2.6)を導入する。純粋便益性指標(基本最尤加重 DAP に相当)では $p=1$ 、純粋費用性指標では $p=-1$ となる(一般論では、 $p>0$ で便益性指標、 $p<0$ で費用性指標、 $p=0$ で中立性指標)。 p 乗荷重指標を採用した下での最尤加重 DAP 更新式は $x_k(t) = \sum a_{kj} x_j(t-1)^{p+1}$ (2.7)で与えられる。さらに関数形指標: $w_{kj} = f_j(x)$ (2.8) ($df/dx > 0$ で便益性指標、 $df/dx < 0$ で費用性指標)、へと一般化でき、最尤加重 DAP 更新式は $x_k(t) = \sum a_{kj} x_j(t-1) f_j(x_j(t-1))$ (2.9)で与えられる。

3. 整合性が有る場合の最尤加重 DAP の考察

前2章にて最尤加重 DAP として、基本最尤加重 DAP(2.5)、 p 乗荷重最尤加重 DAP(2.7)、関数形最尤加重 DAP(2.9)の3種を提起したが、一対比較値に整合性が有る場合($a_{kj} = x_k/x_j$ (3.1))について考察する。

【性質 3.1】 基本最尤加重 DAP(x-DAP)では、整合性条件(3.1)を(2.5)に代入し、更新式 $x_k(t) = \sum_j a_{kj} x_j(t-1) = \sum_j x_k(t-1) x_j(t-1) = x_k(t-1) \sum_j x_j(t-1) = K_1 x_k(t-1)$ (3.2)を得る。但し、 $K_1 = \sum_j x_j(t-1)$ (3.3)は $x_k(t)$ の添字 k に依存しない定数(厳密には t には依存)。すなわち、 $x_k(t)$ は(3.1)の整合的な x_k に収束する。ここで整合的な x_k とは、整合性条件(3.1)を充足する本来仮定してた重みの意味。□

【性質 3.2】 p 乗荷重最尤加重 DAP(x^p-DAP)では、整合性条件(3.1)を(2.7)に代入し、更新式 $x_k(t) = \sum_j a_{kj} x_j(t-1)^{p+1} = \sum_j x_k(t-1) x_j(t-1)^p = x_k(t-1) \sum_j x_j(t-1)^p = K_2 x_k(t-1)$ (3.4)を得る。但し、 $K_2 = \sum_j x_j(t-1)^p$ (3.5)は $x_k(t)$ の添字 k に依存しない定数。すなわち、 $x_k(t)$ は(3.1)の整合的な x_k に収束する。□

【性質 3.3】関数形最尤加重 DAP(f(x)-DAP)では、整合性条件(3.1)を(2.9)に代入し、更新式 $x_k(t) = \sum_j a_{kj} x_j(t-1) f_{kj}(x_j(t-1)) = \sum_j x_k(t-1) f_{kj}(x_j(t-1)) = x_k(t-1) \sum_j f_{kj}(x_j(t-1))$ (3.6)を得る。ここで $w_{kj} = f_j(x)$ (2.8)を $w_{kj} = f_{kj}(x)$ と一般化した。(3.6)において関数 $f_{kj}(x)$ が添字 k に依存しなければ($f_{kj}(x) = f_j(x)$)、更新式 $x_k(t) = x_k(t-1) \sum_j f_j(x_j(t-1)) = K_3 x_k(t-1)$ (3.7)を得る。但し、 $K_3 = \sum_j f_j(x_j(t-1))$ (3.8)は $x_k(t)$ の添字 k に依存しない定数。すなわち、 $x_k(t)$ は(3.1)の整合的な x_k に収束する。□ 従って、たとえ整合的でも加重関数形 $f_{kj}(x)$ が添字 k に依存すると、(3.1)の整合的な x_k に収束するとは限らない(その極端な例として【数値計算例 5.2を参照】)。

性質 3.1～性質 3.3 より、整合的な比較行列 $A = \{a_{kj}\}$ の下では、(3.6)に示す (k, j) 一対比較・選好度更新時の k 依存性がなければ、最尤加重 DAP は整合的な重要度ベクトル $\{x_k\}$ に収束する。なお、選好度=重要度である。

◎ここで、一対比較値に整合性がある場合($a_{kj} = x_k/x_j$ (3.1))の加重 DAP の性質 3.4 について説明する。

【性質 3.4】 整合的な加重 DAP においては、整合性条件(3.1)を(2.2)に代入し、更新式 $x_k(t) = \sum_j w_{kj} a_{kj} x_j(t-1) = \sum_j w_{kj} (x_k(t-1)/x_j(t-1)) x_j(t-1) = \sum_j w_{kj} x_k(t-1) = x_k(t-1) \sum_j w_{kj} = W_k x_k(t-1)$ (3.9)を得る。但し $W_k = \sum_j w_{kj}$ (3.10)は加重行列 $W = \{w_{kj}\}$ の第 k 行の行和である。従って正規化条件(2.3)の下では、 $x_k(t)$ は(3.1)の整合的な x_k に収束する。□

4. 整合性が無い場合の最尤加重 DAP の考察

前 3 章で考察したように、項目間に依怙最頂の無い、ある意味で公平な条件下での、最尤加重 DAP では、一対比較データ $\{a_{kj}\}$ が整合的ならば、 $a_{kj} = x_k/x_j$ (3.1)なる関係を満たす重要度ベクトル $\{x_k\}$ に収束する。それでは、整合的でない場合に最尤加

重 DAP は、如何なる挙動を示すであろうか？

最尤ではない、従来型の DAP、例えば基本 DAP あるいは荷重 DAP でも、線形反復更新式である。しかし最尤加重 DAP は、一般には、非線形の反復更新式で、次章の数値計算例 5.6 に示す如く、振動するなど複雑怪奇な挙動に至ることもある。

5. 基本 DAP、加重 DAP、基本最尤加重 DAP の数値計算例
数値例 5.1 と例 5.2 では加重行列と加重 DAP に注目する。

【数値計算例 5.1: 整合的で正規化条件の場合】一対比較行列が(5.1)で与えられる整合的な場合を考える。整合的なので、 $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ の重要度ベクトル $x^T = (1/6, 1/3, 1/2)$ (5.2)に、基本 DAP、加重 DAP、基本最尤 DAP の 3 DAP 共に、即座に収束する(但し加重 DAP での第 k 行和 W_k は $W_1 = W_2 = W_3 = 1$)。これにより性質 3.1 が確認できた。次に加重 DAP に関する性質 3.4 を検討するため、(2.3)の正規化条件の緩和を検討する。最初に正規化条件は守るが、行毎に異なる加重行列の例(5.3)を調べると、反復 1 回程で(5.2)の重要度ベクトルに収束する。これで性質 3.4 が確認できた。次の例 5.2 では、正規化条件が守られぬ異行和の場合を検討する。

A11=1	A12=1/2	A13=1/3
A21=2	A22=1	A23=2/3
A31=3	A32=3/2	A33=1

(5.1)

W11=1/2	W12=1/4	W13=1/4
W21=1/4	W22=1/2	W23=1/4
W31=1/3	W32=1/3	W33=1/3

(5.3)

【数値計算例 5.2: 整合的で異行和の場合】一対比較値が整合性条件 ($a_{kj} = x_k/x_j$ (3.1))を形式的に充足しても、正規化条件違反の異行和の場合には、重要度ベクトルの収束値は一般的に整合性条件 (3.1)を形式的には満たさない。異行和時の加重 DAP では荷重の影響を加味した実効的な一対比較値 a_{kj}^* が計算できる。以下に、行毎で行和が異なる加重行列の例(5.4), (5.5)を検討する。ここで加重行列(5.4), (5.5)は加重行列(5.3)と第 1,2 行は同じだが、第 3 行が異なる。行和も第 1,2 行は 1 だが、第 3 行は 2 である。反復 5～6 回程で、重要度ベクトルの収束値は、加重行列の例(5.4)では $x^T \doteq (0.123378, 0.246756, 0.629867)$ 、実効的な一対比較値 $a_{12}^* = 2, a_{23}^* = 2.552, a_{13}^* = 5.104$ 、例(5.5)では $x^T \doteq (0.093591, 0.187183, 0.719226)$ 、 $a_{12}^* = 2, a_{23}^* = 3.84, a_{13}^* = 7.68$ で、両例とも推移律 $a_{12}^* \times a_{23}^* = a_{13}^*$ が成立する。性質 3.4 の更新式 $x_k(t) = W_k x_k(t-1)$ (3.9)において W_k は第 k 行和であるが、(3.9)は他行との関係は規定していない。

W11=1/2	W12=1/4	W13=1/4
W21=1/4	W22=1/2	W23=1/4

W11=1/2	W12=1/4	W13=1/4
W21=1/4	W22=1/2	W23=1/4

W31=1	W32=1	W33=0
-------	-------	-------

(5.4)

以下に示す数値計算例 5.3～例 5.6 では基本 DAP と比較した基本最尤 DAP の挙動に注目する。

【数値計算例 5.3: 整合性が少しくずれた場合】

(5.1)で、 $a_{12}=1/2 \rightarrow 1$ 、 $a_{21}=2 \rightarrow 1$ と変更し、整合性が少しくずれた一対比較行列(5.8)を考える。なお逆比性は保存され、Saaty 整合度 $CI \div 0.0268$ 増倍率 $\lambda = 2CI/3 + 1 \div 1.0178$ である。基本 DAP と基本最尤 DAP、共に反復 4～5 回程で重要度ベクトルは、同じ値ではないが $x^T \div (0.215, 0.272, 0.513)$ (5.9), $x^T \div (0.21, 0.29, 0.5)$ (5.10) と、近い値に収束する(図 5.1)。これより、整合性が少しくずれた程度では、基本 DAP と基本最尤 DAP は大差ないと言える。基本 DAP の収束時の増倍率 $\div 1.0178$ で、基本最尤 DAP の収束時の増倍率は、すべての場合に以降共通して、1 となる。基本 DAP(左)と基本最尤 DAP(右)共に下から、青・赤・緑で $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ に対応する。最上部の紫は反復毎の増倍率 λ で収束時 DAP の固有値でもある。

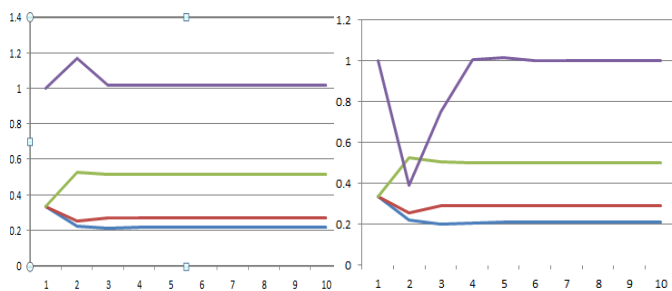


図 5.1: 基本 DAP(左)と基本最尤 DAP(右)の過渡特性

A11=1	A12=1	A13=1/3
A21=1	A22=1	A23=2/3
A31=3	A32=3/2	A33=1

(5.8)

【数値計算例 5.4: 整合性が悪い場合】

逆比性が成り立たず整合性が悪い場合の一対比較行列(5.11)を考える。基本 DAP と基本最尤 DAP、共に反復 5～6 回程で重要度ベクトルは、 $x^T \div (0.404, 0.425, 0.170)$ (5.12), $x^T \div (0.471, 0.378, 0.151)$ (5.13) と、第 1,2 要素の大小が逆転した値に収束する(図 5.2)。収束状態において、基本 DAP では主固有値に相当する増倍率が 0.8248 の縮小認知過程であるが、基本最尤 DAP は増倍率が 1.0 の単純認知過程である。逆比性を仮定した通常の AHP は拡大認知過程であるが、本例では逆比性不成立の $a_{21}=0.5$ 、 $a_{31}=0.2$ の影響で、縮小認知過程となる。しかしながら基本最尤 DAP では、縮小認知過程を回避し、一般に単純認知過程となる。

W31=1	W32=0	W33=1
-------	-------	-------

(5.5)

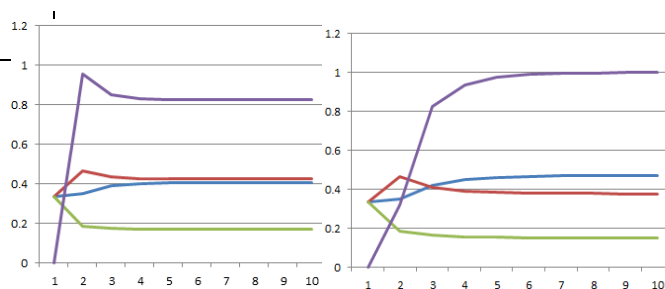


図 5.2: 基本 DAP と基本最尤 DAP の過渡特性

【数値計算例 5.5: 整合性が劣悪な場合】

逆比性は成立するが、Saaty 整合度 $CI \div 0.458346$ と、整合性が劣悪な場合の一対比較行列(5.14)を考える。基本 DAP は反復 10 回程で重要度ベクトルは $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 4^{1/3} \cdot 2^{1/3} \cdot 1/2$, $x^T \div (0.474, 0.377, 0.149)$ (5.15) に収束するが、基本最尤 DAP は反復 25 回程までは微少変動を繰り返し、反復 30 回以降で $x^T \div (0.396, 0.419, 0.185)$ (5.16) にほぼ収束する(図 5.3、増倍率も)。この様に、基本最尤 DAP は整合性が劣悪だとなかなか収束しない。収束状態では主固有値に相当する増倍率がほぼ 1 となる。本例ではどうにか収束したが、次に収束しない例を示す。

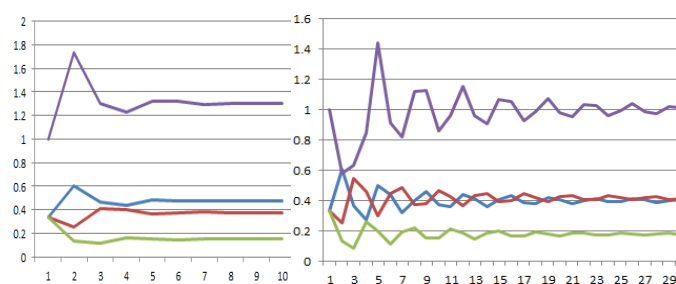


図 5.3: 基本 DAP と基本最尤 DAP の過渡特性

A11=1	A12=1	A13=1
A21=1/2	A22=1	A23=5/2
A31=1/5	A32=2/5	A33=1

(5.11)

A11=1	A12=1/2	A13=8
A21=2	A22=1	A23=1
A31=1/8	A32=1	A33=1

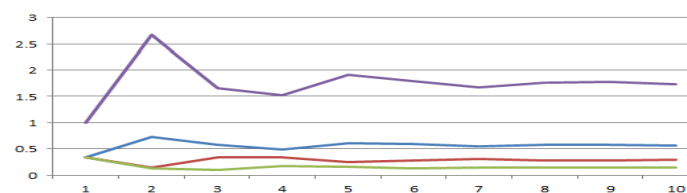
(5.14)

A11=1	A12=1/2	A13=16
A21=2	A22=1	A23=1/2
A31=1/16	A32=2	A33=1

(5.17)

【数値計算例 5.6: 整合性がさらに劣悪な場合】

逆比性は成立するが、Saaty 整合度 $CI=1.125$ と、整合性がさらに劣悪な場合の一対比較行列(5.17)を考える。基本 DAP は反復 10 回程で重要度ベクトルは $x^T = (4/7, 2/7, 1/7) \div (0.571, 0.286, 0.143)$ (5.18) に収束するが、基本最尤 DAP では収束せず、振動が継続する(図 5.4、増倍率も)。主固有値に相当する増倍率もなかなか定まらない。



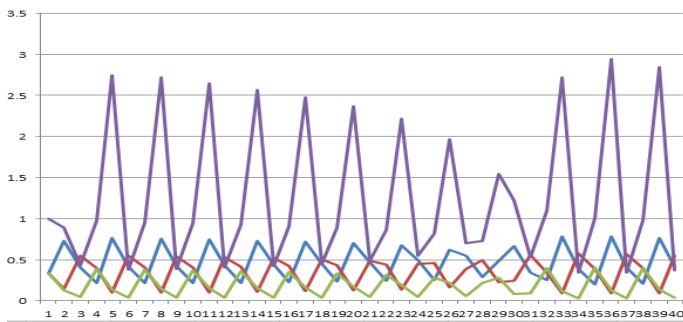


図 5.4 : 基本 DAP(上)と基本最尤 DAP(下)の過渡特性

6. おわりに

ケインズの美人投票論も有効需要論も実は根は同じで(付録 1を参照)、両方とも個々の大衆投票者間の整合性が大きく崩れた時が問題となる。砂漠のオアシスや絶対美女の存在下では迷いは生じない。市場も美人投票も $CI=0$ の完全な整合状態では、主観価値の拡張に繋がらず、魅力に欠ける。右脳でも左脳でも主観拡張と客観縮約を繰り返して、立体感のある意識が形成される。普通の美人投票では個々の投票者の実際に感じている主観データの総合化(平均、代表値、多数決、などで)が決まるが、ケインズの美人投票では個々の投票者の内に潜む未知なる客観データの総合化で決まる。従って主観拡張時の少々の矛盾は許容するが、計算例 5.5、5.6 に示す様に、矛盾が大きすぎると客観縮約が平滑に収束できない。これは行き過ぎた大衆自由民主主義下の不安定性である。

付録 1 : ケインズの有効需要論との関係性

ケインズ経済学では、市場経済が内包する不安定性ゆえに、異常時には政府が積極的に経済に介入し、有効需要を創出すべき、との立場をとる。ケインズ投資論の“美人投票論”とケインズ経済学の“有効需要論”は一見すると無関係だが、両者の関係性について考察する。ケインズ経済学での有効需要とは、商品への単なる欲望ではなく、貨幣的支出に裏づけられた需要で、…などの説明があるが、何が有効 **effective** なのか、分かりにくい。一方でケインズの株式投資美人投票論においては、平均的な一般人が美人と考える候補で、これを有効美人 **effective beauty** とでも名付けよう。ここで、需要とは人間の欲求に基づくが、需要一般について、ある商品への欲求は平均的な一般人がその商品を欲する度合いに比例すると言えるであろうか？

ケインズ美人投票論を直接に有効需要論に適用すれば、YES であるが、疑問が残る。ここでマズローの欲求 5 段階説が登場する。1,2 層の基盤層ではケインズ美人投票論は不成立。なぜなら生理的・直接的な欲求は他人に影響されないから。

3,4 層になると人間社会の社会性などが重要視されるので、ケインズ美人投票論は成立する。すなわち、平均的な一般人が素晴らしい、素敵と思う商品が素晴らしい、素敵となる。かなり他人の意見に左右される。さらに 5(,6)層では人間個人の内面へと回帰する。まとめると、基盤・低層(1,2 層)では、安全性、食欲、飢餓などの緊急時では、他人がどう思うかの他者評価は無いが軽微だ。自分の身の安全なので当然で、ケインズ美人投票論は適用できない。砂漠の飲料水では商品の種類よりも、水そのものが必要なので、供給 S が需要 D を決める($S \rightarrow D$, セイ)。人間社会の社会性が関連するマズロー欲求 5 段階の 3,4 層になるとケインズ美人投票論は適用できる。皆が美味しいと思うものが美味しいのである。主体性欠如と言われれば、その通りであるが、さらなる上層(5,6 層)での内面回帰へと向かう。

さて、何が有効 **effective** なのか? であるが、平均的な皆が有効と思う対象をそう思う…と再帰的/自己循環的な定義に落ち着くが、これは需要とか欲求を、オブジェクト目的物とかゴール目標物ではなく、プロセスとかフローとして捉えることを意味する。有効需要とは、需要連鎖の需要フローで、プロセスとしての需要と言える。お金についても、キャッシュ貯金とキャッシュフローで、前者はストックで後者はフローである。キャッシュフローが生きたお金と言われる。有効需要と同じ意味で、有効キャッシュと言える。電気で言えば、電圧(ストック)だけでは何もできず、電流(フロー)が流れて仕事=電力が発生する。血液でも、血圧(ストック)だけでは何もできず、血流(フロー)が流れて仕事になる。需要で言えば、需要圧(ストック)だけでは何もできず、有効需要(フロー)が流れて仕事になる。状況次第では、質素儉約⇒貯金よりも、消費⇒お金の循環が経済回復に繋がると、ケインズは主張した。

【補足】大衆自由民主主義?の下では、美人と言うのは誰もがそう思うので美人なのであり、お金・貨幣・マネーも同じだろう。これは自己循環論説法と言えるが、その妥当性・安定性はともかく、何にでも言える。誰もがそう思う荷重は未知であるが、その未知荷重で重み付けして、意思決定する。5 章の数値計算例からも解るが、比較行列の整合性が悪いと、重要度ベクトルは振動したり、不安定な挙動を示す。美人でも、貨幣でも、美人間、貨幣間の整合性が悪いと、その評価は長続きしない。最尤加重 DAP は、このようなダイナミズムを表現できる。