ISSN 2186-5647

6-4

Lerch 関数の特殊値の数論的性質

日大生産工　○川島誠

1 導入

与えられた数達が有理数でない (無理数である) か, 或いは, それらの間に代数的数な関係性が存在するか否かを判断するための一般的な手法は知られていない. しかしながら, それらの数に対して**近似を構成**し, それらの**近似が" 十分速く" 収束すること**を示すことができれば, 無理数性をはじめとする代数的関係性がないことが知られている (命題 1 参照). 我々は数の中でも, 円周率 π を一般化した, **代数多様体の周期**に対して, これらの間の代数的関係性の有無を理解したい. Grothendieck は, 1966 年に, 「周期の間の代数的な関係性は, その周期を持つ代数多様体の構造からくるものしかないであろう」という, 所謂**周期予想**を提出している. しかしながら, 現在のところ, 周期予想が成り立つ代数多様体の例は 1 次元射影直線と虚数乗法を持つ楕円曲線しか知られていない. これらの研究手法は, **周期の満たす微分方程式** (Gauss-Manin 接続) の解に対して, **Padé 近似**と呼ばれる級数の有理関数近似を構成し, それらの特殊値として表現される周期の近似を構成し (近似関数に特殊値を代入する), 近似の" 収束の速さ" を調べることで, 代数的な関係性の有無を調べるものである. 本講演では, 周期予想の特別な場合に対する一つの解答を与えるものであり, 対数関数を一般化した, **多重対数関数**, 或いは, それらを一般化した **Lerch 関数**の特殊値の線形独立性を論じる.

2 Padé approximants of Laurent series

命題-定義 1. K を体, $\boldsymbol{f} := (f_1(z), \ldots, f_m(z)) \in 1/zK[[1/z]]^m$ とする. $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ に対して, $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$ とおく. 自然数 $M \geq N$ に対して, 次の条件を満たす多項式族 $(P(z), P_1(z), \ldots, P_m(z))$ が存在する.

(i) $P(z) \neq 0$, かつ $\deg P(z) \leq M$.

(ii) $P(z)f_i(z) - P_i(z) = O(1/z^{n_i+1})$.

$(P(z), P_1(z), \ldots, P_m(z))$ を, $\boldsymbol{f}$ **の重さ** $\boldsymbol{n}$, **次数** M **の** ***Padé*** **型近似**という.

証明

$P(z)$ の係数を $M+1$ 個の未知数とみて, (ii) をそれらの間の $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$ 個の線形関係式とみると, $N < M+1$ であるから, 線形代数より条件を満たす多項式が存在することが分かる. □

注意 1. $\boldsymbol{f}$ の *Padé* 型近似は $\boldsymbol{f}$ の**有理関数近似**である. どんなローラン級数でも *Padé* 型近似が存在するが, 具体的に構成することは一般には難しい.

はじめに, 多重対数関数を一般化した Lerch 関数の具体的な Padé 型近似の構成を紹介する.

定義 1. s を自然数, x を負の整数でない数とする. 冪級数

$$\Phi_s(x, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+x+1)^s}$$

を s 次 *Lerch* 関数という. $x = 0$ のとき, $\Phi_s(0, z)$ を s 次多重対数関数といい, $\mathrm{Li}_s(z)$ とかく.

Arithmetic properties of special values of Lerch functions

MAKOTO KAWASHIMA

3 Padé type approximants of Lerch functions

K を標数 0 の体, $d, m, r_1, \ldots, r_d$ を自然数とする. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を相違なる 0 でない K の元, $x_1, \ldots, x_d$ を整数差のない $K \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ の元とする. 整数 s に対して, K 線形写像 $\varphi_{i,j,s}$ を

$$\varphi_{i,j,s} : K[t] \longrightarrow K; \quad t^k \mapsto \frac{\alpha_i^{k+1}}{(k+x_j+1)^s},$$

と定義する.

定理 1. $r := r_1 + \ldots + r_d$ とおき, $\boldsymbol{n} := (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^{rm}$, l を非負整数とする. 上の記号の元, 多項式族 :

$$P_l(z) := \left[\prod_{j=1}^{d} \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz} + \frac{x_j}{z}\right)^n z^n\right]\left(z^l \prod_{i=1}^{m}(z-\alpha_i)^{rn}\right),$$

$$P_{l,i,j,s_j}(z) := \varphi_{i,j,s_j}\left(\frac{P_l(z) - P_l(t)}{z-t}\right),$$

$(1 \le i \le m, 1 \le j \le d, 1 \le s_j \le r_j)$ と定義すると, $(P_l(z), P_{l,i,j,s_j}(z))$ は $\Phi_{s_j}(x_j, \alpha_i/z)$ の重さ $\boldsymbol{n}$, 次数 $rmd + l$ の *Padé* 型近似である.

注意 2. *Theorem* 1 は *Legendre* 多項式の一般化である. 即ち, $m = d = 1$, $x_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $l = 0$ とするとき,

$$P_0(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n} z^n (z-1)^n,$$

となり, これは $(-1)^n$ 倍の *Legendre* 多項式である. これより, *Legendre* 多項式は対数関数の *Padé* 近似である.

3 A linear independence criterion

以降は K は代数体を表すとする.

ここでは与えられた数達が K 上線形独立になるための十分条件を与える. はじめにひとつの実数が無理数 (有理数でない) であるための十分条件を思い出す.

補題 1. α を実数とする. ある整数のペアの列 $\{(p_n, q_n)\}_{n \ge 0} \subset (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}$ で次の条件が成り立つものが存在するとする. 条件 :

(i) $p_n\alpha - q_n \ne 0$ となる n が無数に存在する.

(ii) $\lim_{n\to\infty} p_n\alpha - q_n = 0$ が成り立つ.

このとき α は無理数である.

証明

$\alpha = q/p$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ となるとして矛盾を出す. (i) より, $q_n/p_n \ne p/q \ldots (*)$ となる n が無数にある. $(*)$ を満たす全ての n に対して, 等式:

$$0 \ne |p_n\alpha - q_n| = \left|p_n\frac{q}{p} - q_n\right| = \frac{|p_n q - q_n p|}{|p|}$$

が成り立つ. **0 でない正の整数の大きさは 1 以上より** $|p_n\alpha - q_n| \ge 1/p$ であるが, これは条件 (ii) に矛盾する. □

補題 1 を一般化すると次が成り立つ.

命題 1. v_0 を K の素点, K_{v_0} を K の v_0 での完備化, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_m) \in K_{v_0}^{m+1}$ とする. 行列族 :

$$(\mathrm{M}_n)_n = \left(\left(a_{l,j}^{(n)}\right)_{0 \le l,j \le m}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{GL}_{m+1}(K),$$

と正数 $\mathbb{A}$, 関数族 $\{F_v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\ge 0}\}_{v:K \text{ の素点}}$ が $n \in \mathbb{N}$ に対して, 条件 :

$$\max_{\substack{0 \le l \le m \\ 1 \le j \le m}} \left|a_{l,0}^{(n)}\theta_j - a_{l,j}^{(n)}\right|_{v_0} \le e^{-\mathbb{A}n + o(n)}, \quad (1)$$

$$\|\mathrm{M}_n\|_v \le e^{F_v(n)} \quad (v : K \text{ の素点}), \quad (2)$$

を満たし, さらに $\lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{v \ne v_0} F_v(n) =: \mathbb{B}$ が存在すると仮定する. 実数 $V := \mathbb{A} - \mathbb{B}$ が $V > 0$ であるとき, m 個の数 $\theta_1, \ldots, \theta_m$ は K 上線形独立である. □

命題 1 を用いて, 以下の Lerch 関数の特殊値の線形独立性が示される

4 Arithmetic properties of special values of Lerch functions

主定理を述べるための準備をする.

$x \in \mathbb{Q}$, $\beta \in K \setminus \{0\}$, v を K の素点とする. $\mathrm{h}(\beta)$ で, β の対数的高さを, $\mathrm{den}(x)$ で, x の分母を表す. $\mu(x) := \mathrm{den}(x) \prod_{\substack{q:\text{prime} \\ q|\mathrm{den}(x)}} q^{1/(q-1)}$ とおく. $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in K^m$, $0 \le x_1 < \ldots < x_d < 1$ をみたす $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Q}^d$ に対して, 実数 :

$$V_v(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x}, \beta) = (rm+1)\log|\beta|_v - rm\mathrm{h}(\beta) + r\sum_{i=1}^{m}\mathrm{h}_v(\alpha_i)$$
$$- (rm+1)\log\|\boldsymbol{\alpha}\|_v - r\sum_{i=1}^{m}\mathrm{h}(\alpha_i) - 4m\left(\max_{1 \le j \le d} b_j r_j^2\right).$$

と定義する. このとき, 以下が成り立つ.

定理 2. K の素点 v_0 が $\max_{1 \le i \le m} |\alpha_i|_{v_0} < |\beta|_{v_0}$ かつ, $V_{v_0}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x}, \beta) > 0$ が成り立つとき, $rm + 1$ 個の K_{v_0} の数 $1, \Phi_{s_j}(x_j, \alpha_i/\beta)$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le d, 1 \le s_j \le r_j)$ は K 上線形独立である.

参考文献

[1] S. David, N. Hirata-Kohno, M. Kawashima, *Linear independence criterion of the Lerch functions with distinct shifts*, preprint.