

## 平衡点解析に基づく感染爆発を説明する巨視的数理モデル

日大生産工(非常勤) ○篠原 正明

情報システム研究所 篠原 健

### 1. はじめに

感染症の伝染、特に“パンデミック”のごとき大流行、を説明する数理モデルを提案する。感染過程を離散時間でマクロ的に捉え、その平衡状態に注目した平衡方程式を立て、非線形方程式の図的解析に基づき、非線形方程式の解である平衡点＝動作点の挙動を調べる。特に複数解＝複数動作点を持つ非線形系における①双安定性、②不連続的遷移、③ヒステリシス性に注目して、それらの発生メカニズムを考察する。なお本論文で考察対象とする“パンデミック”のごとき大流行とは、これら非線形システムに特徴的な現象①②③を呈する感染大爆発を念頭に置く。なお本研究は、生産、通信、通貨サービスなどにおける『再生産』とも密接に関連するので、その点に留意して、以下に議論展開する。

### 2. 感染症伝播の数理モデルの従来研究と本研究の位置づけ

感染症伝播の数理モデルとしては連続時間・微分方程式ならびに離散時間・差分方程式に基づく従来研究(例えば、SIRモデル)が存在する。これら従来研究は、状態空間変数モデルで、数理モデルの分類の観点からは双対変数・微視的・評価フロー値モデルと位置づけられる。一方で本研究で提案する平衡点解析に基づく数理モデルは、システムの各部分でのストック変数に注目し、その平均値が平衡あるいは均衡状態で満たすべき関係性に着目した主変数・巨視的・ストック平均値モデルと位置づけられる。

### 3. 再生産の数理モデルに関する従来研究

本研究においては、患者等と言う病人と感染症等と言う病気を区別し、ストック変数の病人とフロー変数である病気に注目すると、ストック変数の病人は市中感染、院内感染、家族感染などにより再生産し、病人が増加し、その結果としてフローの病気が広がる、と考える。病人を収容する病床や医療設備はストックで、病気とか感染症はフローで基本的にはストック変数が再生産され増加する。病気の原因となる細菌・ウイルスなどの病原体は病人と同様にストック変数で、細菌の再生産は継代増殖過程となる。感染症伝播での再感染を

病原体による再生産と捉えるわけで、本研究と関連した再生産に関連する従来研究の数理モデルを以下にレビューする。なお、同一患者による再感染(reinfection)も、注目する病原体による他者への感染(1次, 2次, 3次感染, …)も、提案する数理モデルでは区別しないで、『再感染』と総称する。

【3.1 生産サービス】生産サービスシステムに元来純粋に加わるマネー源を純投資と呼ぶ。純投資 $\lambda$ に加えて消費サービスが未完了な投資マネーが再投資 $R$ としてサービスシステムに加わる総投資 $A$ となる(定常流として $A=\lambda+R$ )。サービスシステムに加わった総投資 $A$ の一部は消費財として消費され、サービス完了となる。一方で消費を免れた未消費投資(未完了トラヒックに相当) $B$ の一部は、再投資率＝割合 $\beta$ で再投資 $R=\beta B$ として再度、サービスシステムに加わる(機械・設備などはまだ使えるので生産財として)。

【3.2 通信サービス】通信サービスシステムに元来純粋に加わるトラヒック源を純トラヒック $\lambda$ (需要トラヒック、ベーストラヒック、など)と呼ぶ。純トラヒック $\lambda$ に加えてサービスが未完了なトラヒックが再呼 $R$ としてサービスシステムに加わり総トラヒック $A$ となる(定常流として $A=\lambda+R$ )。サービスシステムに加わった総トラヒック $A$ の一部はサービス完了で本来の仕事、天寿を全うし完了トラヒック $C$ に昇華成就する。一方で天寿全うに失敗した未完了トラヒック $B$ は、その一部が(再呼率＝割合 $\beta$ で)、再呼トラヒック $R=\beta B$ として再度、サービスシステムに加わる(呼源ストックの再生産)。

【3.3 通貨サービス】銀行システムに元来純粋に、と言うか根源的に、供給されるマネーを純預金＝純マネー＝ベースマネー(マネタリーベース)と単純化する。ベースマネー $\lambda$ に加えて留保と言う保証サービスが未完了な未保証の留保マネーが保証を求めて再預金 $R$ として銀行システムに加わる総預金 $A$ となる(定常流として $A=\lambda+R$ )。銀行システムに加わった総預金 $A$ の一部は銀行システム内に支払準備金として留保され、保証サービス完了となる。一方で準備金を免れた未保証の留保預金(未完了トラヒックに相当) $B$ の一部は、再預金率＝割合

$\beta$ で再預金  $R = \beta B$  として再度、銀行システムに加わる。ここでは通貨～価値～信用が再生産するわけだが、信用創造と呼ぶ。さらに、通貨はストックではなく、フローである点が、3.1 生産サービスと 3.2 通信サービスと異なる。

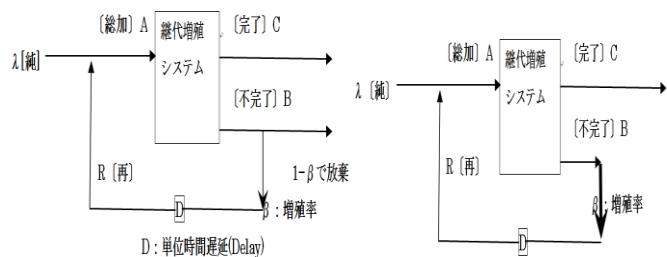


図 4.1: 病原体の継代増殖過程

#### 4. 再生産システムとしての再感染モデル

4.1 節において、細菌・ウイルスなど病気の原因となる病原体が自己増殖する様を表現する再感染モデル(病原体増殖過程)、4.2 節において、患者さんなど病人が市中感染、院内感染、家族感染などにより病人が病人を再生産し、その結果として病気が蔓延する様を表現する再感染モデル(病人増殖過程)について説明する。ストック変数である病人が病院内で院内感染と言う名の『再生産』により病人が増える訳で、一方でストック変数『病人』の素粒子は何かと言うと『病原体』というストック変数である。ストック変数『病人』に対するフロー変数が『病気』であり、ストック変数『病原体』に対するフロー変数は…?という病気の素と言う意味で『病素』と名付ける。但し、病原体の中でも非生物～情報に分類されるウイルスをストック変数に分類するのは少々無理がある。この辺は生産経済学での内外発生的成長の識別においても同様な課題を抱える。特殊な性質上、ウイルスについてはフロー変数とも見なせる。するとウイルス増殖過程は、フロー変数である通貨の信用創造にも対比しうると言える。

【4.1 病原体の継代増殖モデル】説明の了解性向上と単純化のため、以下では病原体をウイルスとする。人間社会・生態系に元来純粋に、と言うか根源的に、供給されるウイルスを純ウイルス＝ベースウイルスと単純化する。ベースウイルス流入に加えてウイルスの本来業務に失敗した未完了ウイルスが再感染  $R$  として生態系に加わり総ウイルス  $A$  となる(定常流として  $A = \lambda + R$ )。ここでウイルスの本来業務を、宿主に単位スロット時間の間留まる事と規定する(離散時間モデルでは)。人間社会・生態系に加わった総ウイルス  $A$  の一部はウイルスの本来業務を達成しサービス完了となる。一方でサービス完了を免れた未完了ウイルス  $B$  の一部は、 $\beta$  値＝再呼率

＝再感染率＝増殖率＝比率＝割合  $\beta$  で再感染  $R = \beta B$  として再度、感染システムに加わる。

次に再呼モデルの記号を用いて、離散時間更新式を(4.1)～(4.4)に再掲示する。各変数間の関係を図 4.1 に示す。また  $\lambda(t) \sim C(t)$  のウイルス密度の名称の後に再呼モデル・通信システムでのトラヒックの名称を括弧内表示するが、トラヒックとウイルス密度が 1:1 対応する。

$$A(t) = \lambda(t) + R(t) \quad (4.1) \quad B(t) = g(A(t)) \quad (4.2)$$

$$C(t) = f(A(t)) \quad (4.3) \quad R(t) = \beta B(t-1) \quad (4.4)$$

$\lambda(t)$ :  $t$  期の純付加ウイルス密度 (純トラヒック)

$A(t)$ :  $t$  期の総付加ウイルス密度 (加わる総トラヒック)

$R(t)$ :  $t$  期の再感染ウイルス密度 (再呼トラヒック)

$B(t)$ :  $t$  期の役目未完了ウイルス密度(サービス未完了トラヒック)

$C(t)$ :  $t$  期の役目完了ウイルス密度(サービス完了トラヒック)

3.1 節の生産サービス、3.2 節の通信サービス、3.3 節の通貨サービスにおいては、通常は  $\beta$  値は、 $0 \leq \beta \leq 1$  (4.5)と  $[0, 1]$  上下制限を受ける(特に実体経済と関係する 3.1 節と 3.2 節では)。ところがウイルスの継代増殖過程では  $\beta$  値は、 $1 < \beta$  (4.6)の場合に注目する。例えば通信サービスでは、 $1 - \beta$  の割合の通信呼が再試行を放棄するので、 $1 - \beta$  は放棄率とも呼ばれ、通信ユーザーの習性を表す大事な指標の一つである。ところが、増殖率を想定した継代増殖モデルでは放棄率  $1 - \beta < 0$  となり、負のウイルス流を想定しなければならないので、増殖部に注目した継代増殖過程を図 4.2 に示す。

【4.2 病人の感染拡大による増殖モデル】継代増殖モデルでは細菌・ウイルスが増殖する様を扱うが、細菌・ウイルスの宿主である病人の視点から、商品の再生産と対比すべき病人の再生産＝再感染を考察する。病院を院内感染による病人の再生産システムと見なすのは、不謹慎ではあるが、人間社会全体を病院と考えれば数理モデルとしては妥当である。

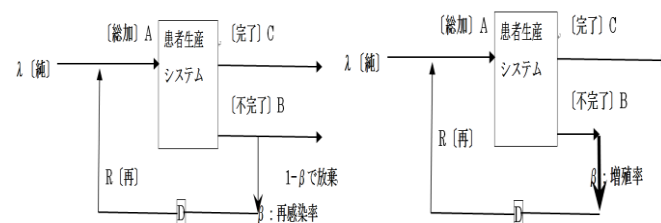


図 4.3: 再生産システム

#### としての再感染モデル

病人の生産サービスシステムに元来純粋に加わる病人を純患者(根源患者、ベース患者、など)と呼ぶ。純患者  $\lambda$  に加えて病気・疾病サービスが未完了な患者(完治でも死亡でもない)

図 4.4: 増殖型の再感染モデル

が再感染患者Rとしてサービスシステムに加わる総患者Aとなる(定常流として $A=\lambda+R$ )。ここでは病気・疾病を一種の休養サービスと捉える。サービスシステムに加わった総患者Aの一部は病院での治療を受け、退院(死去を含む)でサービス完了となる。一方で退院しなかった退院待ち患者(不完了トラヒックに相当)Bの一部は、再感染率=割合 $\beta$ で再感染患者 $R=\beta B$ として再度、サービスシステムに加わる。

## 5. 線形再感染モデルの均衡点

4.1 節、4.2 節の再感染モデルの動作均衡点を 4.2 節(病人増殖過程)を念頭に具体的に考察する。注目する対象オブジェクトがウイルスから病人患者になったので、 $\lambda \sim C$ の各変数も以下の名称を持つが、数理的構造は同じである(時期 $t$ は省略)。  
 $\lambda$  : 純原因患者数                       $A$  : 総患者数  
 $R$  : 再感染患者数                       $B$  : 任務未完了患者数  
 $C$  : 任務完了患者数(患者の任務が完了とは、我慢できなくなって out of patience、死退去するか、治療退院するか)。  
 定常状態を仮定すると、(4.1)~(4.4)で添え字をとり(5.1)~(5.4)の非線形連立方程式を得る。

$$A=\lambda+R \quad (5.1) \quad B=g(A) \quad (5.2)$$

$$C=f(A) \quad (5.3) \quad R=\beta B \quad (5.4)$$

さらに、生産システムの入出力保存則 $A=B+C$  (5.5)を考慮すると、非線形連立方程式(5.1)~(5.4)は1変数非線形方程式 $f(A)=((\beta-1)/\beta)A+\lambda/\beta$  (5.6)に帰着する。ここで $C=f(A)$ は完了特性で、補助変数 $y$ を導入すると、(5.6)は $y=f(A)=((\beta-1)/\beta)A+\lambda/\beta$  (5.7)となる。すなわち、動作点は完了特性 $y=f(x)$  (5.8)と再感染直線 $y=((\beta-1)/\beta)x+\lambda/\beta$  (5.9)の交点( $A \rightarrow x$ と置換)---と図的解釈ができる。

ここで完了特性 $y=f(x)$ は、定常性を仮定した下での、総患者数 $A=x$ の関数 $f(x)$ としての完了患者数の特性を表現する。例えば電話通信システムではシステム容量付近で飽和し、更には混雑による性能低下などの非線形現象も観察されるが、5章の線形再感染モデルでは、完了特性 $y=f(x)$ が線形の場合 $y=f(x)=kx$  (5.10)を考察する。数理モデルとしては、定常的に総患者数 $A=x$ の一定比率 $k$ の患者 $kx$ が完了(退院)する。その他の比率 $(1-k)$ の患者 $(1-k)x$ は未完了で、再感染率 $\beta$ で患者として留まる(図 4.3、図 4.4)。線形再感染モデルの動作点は2変数 $(x,y)$ の線形連立方程式 $y=((\beta-1)/\beta)x+\lambda/\beta$  (5.9)と $y=kx$  (5.10)を直接解き、以下の陽解(5.11),(5.12)を得る。

$$x=\lambda/(1-\beta(1-k)) \quad (5.11), \quad y=kx=\lambda k/(1-\beta(1-k)) \quad (5.12)$$

ここで再感染率 $\beta$ と不完了率 $1-k$ の積として実効増倍率 $\gamma=\beta$

( $1-k$ )を定義すると、定理 5.1 を得る。

【定理 5.1】 総患者数 $A=x$ が非負値をとる必要十分条件は実効増倍率 $\gamma=\beta(1-k)$ が1未満である。さもなくば、動作点としての解は発散状態である。  $A=x \geq 0 \Leftrightarrow \gamma=\beta(1-k) < 1$  (5.13)

線形再感染モデルでの非負値動作点の必要十分条件(5.13)は、流行抑止条件 $R=R_0(1-p) < 1$ と同値である。但し、 $R_0$ は基本再生産数で $\beta$ に、 $p$ は予防接種率=感染済確率で完了率 $k$ に対応する(ウイルスの任務完了とは患者を感染済の状態にする事)。

【計算例 5.1】 受動的線形再感染モデルの均衡点

受動的とは再感染率 $\beta$ が1未満( $\beta < 1$ )とする。再感染直線の $x$ 切片は $\lambda/(1-\beta)$ で、 $y$ 切片は $\lambda/\beta$ なので、再感染直線と線形完了関数の交点としての動作均衡点は安定的に第一象限に形成される。 $\lambda=100$ 人、 $\beta=2/3$ 、 $k=0.9$ とすると、再感染直線の $x$ 切片 $=\lambda/(1-\beta)=300$ 人、 $y$ 切片 $=\lambda/\beta=150$ 人、実効増倍率 $\gamma=\beta(1-k)=2/30$ 、総患者 $A=x=\lambda/(1-\gamma) \approx 107.14$ 人、完了患者 $C=y \approx 96.43$ 人となる。定常流を検算すると：保存則 $A=B+C$  (5.5)より未完了患者 $B \approx 10.71$ となり、その $\beta=2/3$ が再感染患者 $R$ として純原因患者 $\lambda$ と合わせて総患者 $A$ となっていることが確認できる。

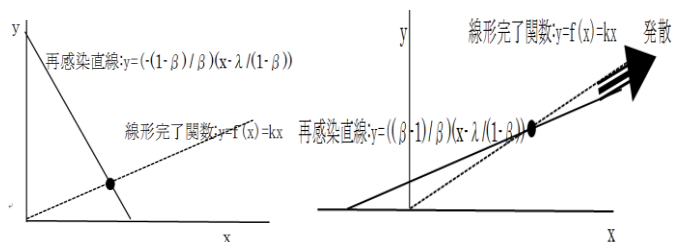


図 5.1: 受動的線形再感染モデル 図 5.2: 能動的線形再感染モデル (交点が形成されない場合は発散)

【計算例 5.2】 能動的線形再感染モデルの均衡点

能動的とは再感染率 $\beta$ が1以上( $\beta \geq 1$ )とする。再感染直線の $x$ 切片は $\lambda/(1-\beta) \leq 0$ で、 $y$ 切片は $\lambda/\beta$ なので、再感染直線(実線)と線形完了関数(破線)の交点としての動作均衡点の幾何学的配置は図 5.2 に示す様に、受動的線形再感染モデル(図 5.1)のそれとは異なる。動作均衡点が安定的に形成されるためには、線形完了関数 $y=kx$ の傾き $k$ が再感染直線 $y=((\beta-1)/\beta)x+\lambda/(1-\beta)$ の傾き $(\beta-1)/\beta$ を上回る必要がある。すなわち $k > (\beta-1)/\beta$  (5.14)を得る。これは定理 5.1 の『総患者数 $A=x$ が非負値 $\Leftrightarrow$ 実効増倍率 $\gamma=\beta(1-k)$ が1未満(5.13)』とも一致する。

$\lambda=100$ 人、 $\beta=5$ 、 $k=0.9$ とすると、再感染直線の $x$ 切片 $=\lambda/(1-\beta)=-25$ 人、 $y$ 切片 $=\lambda/\beta=20$ 人、実効増倍率 $\gamma=\beta(1-k)=0.5$ 、総患者 $A=x=\lambda/(1-\gamma)=200$ 人、完了患者 $C=y=180$ 人となる。定常流を検算すると：保存則 $A=B+C$  (5.5)より未完了患者 $B=20$



となり、その $\beta=5$ 倍が再感染患者 R として純原因患者 $\lambda$ と合わせて総患者 A となっていることが確認できる。それでは図 5.2 において線形完了関数  $y=kx$  の傾き  $k$  が再感染直線  $y=((\beta-1)/\beta)(x-\lambda/(1-\beta))$  の傾き $(\beta-1)/\beta$ を下回ると、どうなるか？ 例えば $\lambda=100$ 人、 $\beta=16$ 、 $k=0.9$ とすると、計算上は再感染直線の $x$ 切片 $=\lambda/(1-\beta)=-20/3$ 人、 $y$ 切片 $=\lambda/\beta=6.25$ 人、実効増倍率 $\gamma=\beta(1-k)=1.44$ 、総患者 $A=x=\lambda/(1-\gamma)=-227.27$ 人、完了患者 $C=y=-204.54$ 人となるが、動作均衡点は第一象限ではなく第四象限に形成され、物理的には図中に矢印表示した無限遠点への発散状態と解釈できる。同じ線形再感染モデルでも、能動的モデル( $\beta \geq 1$ )では、油断すると感染爆発につながる事が分かる。

## 6. 非線形再感染モデルの均衡点

5章では単純な線形の完了特性を仮定したが、より現実的な再感染モデルの患者生産システムとして非線形な完了特性を考察する。通信サービスでは交換装置、伝送装置などに容量が存在し、飽和型の完了特性を想定、経済的な生産サービスでは人口×満足度で飽和する容量が存在するか、それとも人間の欲は無制限と、線形の完了特性を想定するかの議論がある。そこで再感染モデルにおいても、何らかの形で容量らしきものを想定する。線形の完了特性では、定常的に総患者 $A=x$ の一定割合 $y=kx$ で患者卒業者あるいは完了者(退去・死去)と仮定したところを、一般的には非線形な完了関数 $y=f(x)$ 、具体的には図 6.1(一段容量)と図 6.2(二段容量)に示す2種の容量飽和特性を考察する。図 6.1の一段容量特性では、総患者 $A=x$ の増加に伴い患者卒業者 $C=y$ が頭打ち・飽和する。急増した患者未卒業者が再感染患者として患者生産システム(例えば病院)に押しかける。図 6.2の二段容量特性では、一段目の容量(通常病床、高感受性者、等と解釈)の飽和後に、二段目の容量(緊急病床、普通感受性者、..)が存在する。

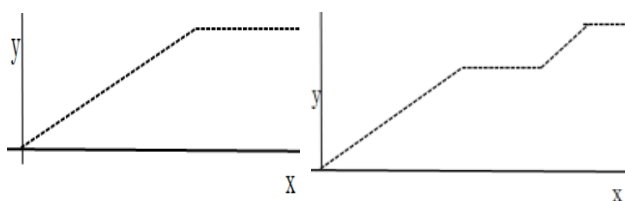


図 6.1 一段容量型の完了関数 図 6.2 二段容量型の完了関数

【計算例 6.1】能動的な非線形再感染モデル(一段容量)の均衡点  
受動的再感染モデルは再呼率 $\beta$ が1未満( $\beta < 1$ )の通信サービス系と挙動が数理的には同じであり、完了関数  $y=f(x)$  が性能低下特性を持たない限りは安定な動作点が形成される(性能低下無し  
の容量飽和型でも)。しかし、再感染率 $\beta$ が1以上( $\beta \geq 1$ )の能動

的再感染モデルでは常に安定な動作点が形成されるとは限らない。最初に、図 6.1 に示す様に完了特性がある容量で飽和する場合(一段容量)の均衡動作点を考察する。

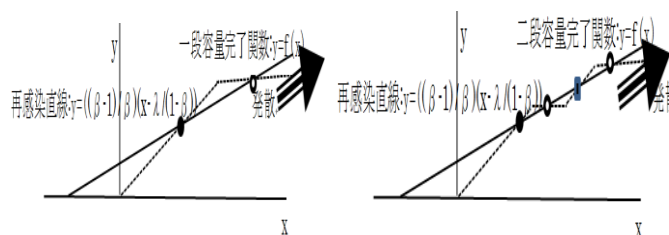


図 6.3 一段容量型の均衡点 図 6.4 二段容量型の均衡点

再感染直線と一段容量完了関数の交点として、黒丸●の安定動作点と白丸○の不安定動作点を得る(図 6.3)。黒丸●は計算例 5.2(図 6.2)と同様な安定動作点であるが、白丸○は不安定動作点なので定常的には存在しない。なお白丸○の右上方向に矢印で、「⇒発散」との表示があるが、これは一段容量で完了となった再感染患者による、不安定動作点の白丸○経由の感染爆発を示唆する。

【計算例 6.2】能動的な非線形再感染モデル(二段容量)の均衡点  
再感染直線と二段容量完了関数の交点として、黒丸●と黒四角■の二つの安定動作点と白丸○の二つの不安定動作点を得る(図 6.4)。黒丸●は計算例 5.2(図 6.2)と同様な安定動作点であるが、黒四角■は二段目の容量の存在ゆえに形成される安定動作点である。通常病床のみでは感染爆発により発散(図 6.3)するところを、緊急病床により再感染患者を収容できている状況である。さらに総患者 $A=x$ が増えれば、右側の不安定動作点の白丸○を経由して感染爆発「⇒発散」となる。例えば、黒丸●の安定点で動作中に一時的に純患者が急増すると動作点は黒四角■に移行し、純患者が元に戻っても黒四角■の安定点に留まり、蔓延が持続する。

## 7. おわりに

ある新種の感染症の発生から終息までの数理シナリオとして、再感染直線と完了関数の交点としての動作均衡点に注目すると、地域的な感染拡大(エピデミック:図 5.2)が発生し、 $\beta$ 値抑制制御によりエンデミック(図 5.1)としての封じ込めが想定できる。逆に、エンデミックは油断すれば、受動的感染から能動的感染へと移行し、更にはエピデミック化する。特に $\beta$ 値が1前後で動作均衡点の幾何学的構造が大きく変化するが、エンデミック⇄エピデミック⇄パンデミックなど、感染症での相転移に対応する。感染症対策の視点:感染爆発に対して無尽蔵に患者収容と言うのは、地球規模で考えても、限界がある。結果として多段の容量を持つ飽和型の非線形な完了関数を想定するのが現実的であろう。完了関数をマクロ的に想定できる点が巨視的数理モデルの特長であるが、完了関数の具体的な設計法は今後の課題である。