

動的平均化により交換価値から価値が形成

日大生産工(非常勤) ○篠原 正明

情報システム研究所 篠原 健

1. はじめに

AHP での一対比較の基本は、「商品 i と商品 j の価値の一対比較値 a_{ij} の比率データをすべての源泉として、商品 i の価値 x_i を決定する」、である(AHP では商品(項目と呼ぶ)。ここで、一対比較値という主観的比率データは比較的容易に測定でき、さらに、一対比較行列 $A=\{a_{ij}\}$ の主固有ベクトルが価値ベクトル $x=\{x_i\}$ に対応するという、AHP の理論的裏付けが、一対比較行列 $A=\{a_{ij}\}$ に欠落要素が存在しない完全情報下では、成立する。本論文では、経済学(例えばマルクス『資本論』)の価値理論における、交換価値(exchange value)、価値を AHP 理論の一対比較値、価値(AHP では重要度、ウェイト、等と呼ぶ)と対応させ、両者の間の同型性に注目し、従来は基礎的で難解と言われている経済学の価値理論に対して、AHP の一対比較にもとづく具体的な解釈を提案する。

2. 交換価値から商品価値へ；商品数 $n=3$ の例

商品 i の商品 j に対する交換価値 a_{ij} : 1 個の商品 j と等価交換可能な商品 i の個数とすると、逆比整合性(単に逆比性と言う)は「 $a_{ij}=1/a_{ji}$ 」となる。又、3 点間整合性は「 $a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ki}=1$ 」となる。これらの整合性は現実の経済取引では必ずしも常に成立しないが、理想としてそう願いたい。さらに、自己同一性は「 $a_{ii}=1$ 」となる。同一の商品は同じ価値を持つ。これは通常成立する(同一時点に限定)。次に、交換価値 a_{ij} を (i,j) 要素とする行列 $A=\{a_{ij}\}$ を導入する。交換価値行列あるいは交換行列とも呼ぶべき行列で、AHP では一対比較行列あるいは比較行列に対応する。次に {商品 1、商品 2、商品 3} から構成される商品数 $n=3$ の例により問題意識を説明する。

【交換行列・例 2.1】

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

例 2.1 では整合性が存在するので、価値ベクトルを列ベクトル x とすれば、総和が 1 という正規化条件下($\sum x_i=1$)では、

(2.2)で与えられ、(2.3)に示すように、交換価値 a_{ij} は商品 i の価値 x_i の商品 j の価値 x_j に対する比率で表せる。

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1/2 \cdot 3, \text{ or } x^T = (x_1, x_2, x_3) = (1/6, 1/3, 1/2) \quad (2.2)$$

$$a_{ij} = x_i / x_j \quad (2.3)$$

ここで、交換価値(一対比較値)は比率尺度であるが、商品価値(項目ウェイト)も比率尺度である。なぜなら、(ここでは総和が 1 という)正規化条件が課されているからである。すなわち、交換価値は商品価値よりも次数が一段上の比率尺度で、より主観的と言える。

【交換行列・例 2.2】

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/6 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 6 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

例 2.2 では、もはや整合性が存在しない。ここで整合性とは、「商品 $i \rightarrow$ 商品 $j \rightarrow$ 商品 k 」の交換ルートと「商品 $i \rightarrow$ 商品 k 」の交換での交換価値が等しい性質である。 $a_{12} \cdot a_{23} = 1/3 \neq a_{13} = 1/6$ なので、整合性は存在しない。ただし、逆比性は「 $a_{ij}=1/a_{ji}$ 」は成立している。整合性がないので、交換価値と商品価値の間の比率表現式(2.3)は成立しない。このような状況下で、AHP では交換価値行列 A の主固有ベクトルを商品価値ベクトルとして採用することを強く主張する。その理由は、主固有ベクトルを求める反復プロセスが、認知プロセスの数学モデルである動的平均化プロセス DAP(Dynamic Averaging Process)と解釈できるからである (DAP については、4 章で)。交換価値行列 A の主固有ベクトル $x^T = (x_1, x_2, x_3)$ は(2.5)で与えられる。

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1/2 \cdot 4/3 : 2/3 \cdot 3, \text{ or } x^T = (x_1, x_2, x_3) = (1, 2^{4/3}, 2^{2/3}) / (1 + 2^{4/3} + 2^{2/3}) \doteq (0.121, 0.304, 0.575) \quad (2.5)$$

【交換行列・例 2.3】

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/6 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

例 2.3 では、3 点整合性は成立するが、逆比性は一部で不成立である。3 商品間の循環的な交換連鎖(「商品 1→商品 2→商品 3→商品 1」あるいは「商品 1→商品 3→商品 2→商品 1」)では、同一商品同一価値が保証されるが、一部の 2 商品間の往復的な交換連鎖(「商品 1→商品 2→商品 1」あるいは「商品 2→商品 3→商品 2」)では保証されない。前者の往復連鎖では価値増殖が、後者の往復連鎖では価値減衰が発生する。AHP では通常、逆比性成立を仮定することが多いが、本例はそれが不成立の稀な例である。局所的には不整合部が存在するが、全体(3 商品間)では整合的な例でもある。交換価値行列 A の主固有ベクトル $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$ は(2.7)で与えられる。 $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3) \doteq (0.117, 0.272, 0.611)$ (2.7) なお、本例 2.3 では、逆比性不成立だが、 $e_{ij} + e_{ji} \geq 2$ は成立し、 $CI \geq 0$ である。

3. 整合性

前章では交換価値行列 A の主固有ベクトルとして商品価値ベクトル $\mathbf{x}$ を導出したが、AHP ではこの商品価値ベクトル $\mathbf{x}$ の辻褄が合う、合わないの尺度として、Saaty 整合度 CI (Consistency Index)を広く用いる。この整合度 CI の意味を、主固有値 λ との関係から、商品数 n の一般の場合について以下に簡潔に説明する。

商品対 (i, j) について、ある種の誤差 $e_{ij} = a_{ij}(x_j/x_i)$ (3.1) を定義する。逆比性のもとでは、

$$e_{ij} + e_{ji} \geq 2 \quad (3.2) \text{ (等号は } e_{ij} = 1 \text{) が成立する。}$$

交換価値行列 A の主固有値 λ 、主固有ベクトル $\mathbf{x}$ について、(3.3) が成立する。 (i, i) 対角要素に x_i を持つ対角行列 $D(\mathbf{x}) = \text{diag}\{x_i\}$ 、 $n \times n$ 誤差行列 $E = \{e_{ij}\}$ を導入すると、(3.3) を出発式として以下の一連の関係式が成立する。

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (3.3) \quad A D(\mathbf{x})^{-1} = \lambda D(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{x} \quad (3.4)$$

$$D(\mathbf{x})^{-1} A D(\mathbf{x}) = \lambda D(\mathbf{x})^{-1} D(\mathbf{x}) \mathbf{1} \quad (3.5)$$

$$E \mathbf{1} = \lambda \mathbf{1} \quad (3.6) \quad \mathbf{1}^T E \mathbf{1} = \sum e_{ij} = \lambda \mathbf{1}^T \mathbf{1} = n \lambda \quad (3.7)$$

$$\sum (e_{ij} - 1) = n \lambda - n^2 \quad (3.8)$$

$$\sum (e_{ij} - 1) = \sum_{i=j} (e_{ij} - 1) + \sum_{i \neq j} (e_{ij} - 1) = n(\lambda - n) \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \neq j} (e_{ij} - 1) / n(n-1) = n(\lambda - n) / n(n-1) \quad (3.10)$$

$$CI \triangleq \sum_{i \neq j} (e_{ij} - 1) / n(n-1) = (\lambda - n) / (n-1) \geq 0 \quad (3.11)$$

すなわち整合度 CI は交換価値 a_{ij} のある種の誤差 e_{ij} の、対角成分 $i=j$ を除いた $n(n-1)$ 個の算術平均値、から 1 を差引いた値で、(3.2) より零以上で、整合性があるとき $CI = 0$ となる。前章の 3 例について誤差行列 E、整合度 CI を計算する。

○例 2.1 では誤差行列 $E = \{e_{ij}\} = \{1\}$ は全要素オール 1 となる。

また $\lambda = 3$, $n = 3$ なので、誤差 e_{ij} の算術平均値ならびに固有値 λ による定義、ともに $CI = 0$ と両者一致する。

○例 2.2 では $\lambda = 3.0536$ 、誤差行列 E を(3.12)に示す。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1.26 & 0.794 \\ 0.794 & 1 & 1.26 \\ 1.26 & 0.794 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

誤差行列 E の非対角要素 6 個の算術平均値 $= 1.02681$ 、これより 1 を引いて $CI = 0.02681$ 、主固有値 λ を用いた(3.11)より $CI = (3.0536 - 3) / 2 = 0.02681$ 、と一致する。

○例 2.3 では $\lambda = 3.03681$ 、誤差行列 E を(3.13)に示す。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1.165 & 0.872 \\ 1.288 & 1 & 0.749 \\ 1.146 & 0.89 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

誤差行列 E の非対角要素 6 個の算術平均値 $= 1.0184$ 、これより 1 を引いて $CI = 0.0184$ 、主固有値 λ を用いた(3.11)より $CI = (3.03681 - 3) / 2 = 0.0184$ 、と一致する。本例では交換行列の逆比性が不成立なので、誤差行列でも逆比性が不成立である。しかし、誤差の平均という意味合いは保存される。

4. 動的平均化プロセス

動的平均化プロセス DAP は、AHP などにおいて、項目間の相互比較と相互比較により得た対象項目に関する情報の平均化(広い意味での平均操作)により、項目重要度が定まっていく過程の数理モデルである。さらに、DAP は人類が認知革命において獲得した認知機能の基本数理とも言える。

相互比較としては、比率にもとづく一対比較を採用し、対象項目に関する情報としては項目重要度(項目ウェイトとも言う)を考える。ここで、項目ウェイトは、具体的にはリンゴ、ミカン、バナナなどの選好度合い、視覚画像の一画素の明暗度、等と、認識(認知)対象に依存するが、商品価値も、広い意味での一般的な DAP に従うことを本論で主張する。

4.1 離散時間モデル

時点 t における項目 i の重要度 $x_i(t)$ は、「前時点 $t-1$ における項目 j からみた注目する項目 i のウェイト」 $a_{ij} x_j(t-1)$ ($j=1, 2, 3, \dots, n$) の何らかの関数(4.1)として定まると考える(項目数 $= n$)。ここで、 a_{ij} は項目 i の、項目 j を基準とした、選好比率、あるいは重要度比率である。具体的には、「項目 i を項目 j の何倍好きか」である。

$$\begin{aligned} x_i(t) &= f(a_{i1} x_1(t-1), a_{i2} x_2(t-1), \dots, a_{in} x_n(t-1)) \\ &= f(a_{ij} x_j(t-1); j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.1)$$

最も直観的な関数 f は算術平均であろう。

$$x_i(t)=f(a_{ij}x_j(t-1);j=1,2,\cdots,n)=\sum a_{ij}x_j(t-1)/n \quad (4.2)$$

不完全情報下においても、 $n_i=|S_i|$ を比較行列Aの第i行の実測要素数とすれば、(4.3)を得る(但し、 S_i は項目iとの一対比較を実測した項目の集合)。

$$x_i(t)=f(a_{ij}x_j(t-1);j\in S_i)=\sum_{j\in S_i} a_{ij}x_j(t-1)/n_i \quad (4.3)$$

(4.3)右辺ではAの第i行の実測(非欠落)要素についてのみ総和をとっているが、 $a_{ij}=0(j\notin S_i)$ とすれば、(4.4)と表記できる。

$$x_i(t)=\sum a_{ij}x_j(t-1)/n_i \quad (4.4)$$

完全情報は完全グラフ(メッシュ)、不完全情報は完全グラフに限定されない一般のネットワークに対応し、このようなネットワーク的価値連鎖が存在する場合の商品価値決定の問題点は、資本論・第1章・第3節において、『Defects of the Total or Expanded Form of Value』として指摘されており、AHPにおいて本課題は「不完全情報下の問題(+複数評価者+時変+不整合)」として統一的に扱うことができる。

このように、DAPの基本的考え方は、「注目する項目iの新しい重要度評価に、その項目iとの一対比較が可能な項目jからの注目する項目iの被評価値(評点) $a_{ij}x_j(j\in S_i)$ の集合の何らかの要約統計量(単に、統計量あるいはaverage)を採用する」である。DAPのAはaveragingの頭文字で、「平均化」と訳すが、正確には「何らかの平均などの統計的代表値」の意味である。

4.2 DAPと固有ベクトル

完全情報下のDAP更新式(4.2)は、行列表記(4.5)となる。

$$x(t)=Ax(t-1)/n \quad (4.5)$$

(4.5)の反復更新式において、充分大なるtに対して(4.6)で表現される、増加($\lambda>1$)、一定($\lambda=1$)、あるいは減少($\lambda<1$)の定常状態(厳密には、定常増加、定常一定、定常減少とも言うべき)が達成されたとしよう。

$$x(t)=\lambda x(t-1) \quad (4.6)$$

λ が係数行列A/nの固有値で、対応する $x(\infty)$ が固有ベクトルで、(4.7)が成立する。 $Ax(\infty)/n=\lambda x(\infty)$ (4.7)

これ以外にも、不完全情報下のDAP更新式、その他様々なDAP更新式においても、(4.6)と同様の定常状態を想定し、対応する固有ベクトルを求めることが主たる課題であり、倍率 λ が対応する固有値である。

4.3 動的な意思決定モデルとしてのDAPとその研究課題

我々人間は、日々社会生活を営むなかで、個人としても、会社組織という集団でも、社会全体としても、ある時は意識して、またある時は無意識に意思決定を行っている。日常の言

葉による会話、会議での議論、国会での議決、これら様々なプロセスは、時間を横軸にとれば、動的平均化プロセスDAPとみなせる。さらに、五感に代表される様々な感覚器官においても、ミクロな神経系における動的平均化プロセスである神経ネットワークプロセスNNP(Neural Net Process)が定式化できる(特に表層感覚)。ここで、何かの平均を求めるとは、様々な被評価値(評点)の集合、例えば、A君による評点、B君による評点、C君による評点、…から、何らかの代表値を求めることに他ならない。伝統的なSaaty型AHPにおいては、算術平均を採用するが、これ以外にも様々な平均値、代表値が考えられる。生体情報処理の観点からは、多数決論理、最頻値、などとの適合性が主張できる。個別の動的平均化プロセスに依存して、どのような平均値関数を選択すべきかが、研究課題①である。最も直観的な算術平均を採用した場合においても、 $a_{ij}x_j$ の単純な算術平均が現実的か?と言う疑問が生じる。重要な項目は程度に応じた荷重平均をとるべきであろう。すなわち重み付きDAP(w-DAP)[1]において、重みwとして未知の価値ベクトルxを採用すべきと考える。最尤x-DAPの解法が研究課題②である。さて、誤差 $e_j=a_j(x_j/x_i)$ のある種の平均(3.11)で定義される、数学的にはエレガントなSaaty整合度CIにおいても同様な課題に遭遇する。これを研究課題③とする。

5. マルクス『資本論』についての解釈・注釈・考察

5.1 比率尺度の度合(客観度)に基づく価値の階層構造

交換価値は一対比較値なので主観的、価値はAHPでは真の価値、などとも言うのでより客観的と言える。価格は貨幣との、使用価値は使用の効用との交換価値なので、価格と使用価値は主観的な側面もある。価値は単位元(あるいは不変真理)との交換価値とも言える。比率の比率など、比率尺度の度合いが高いと主観的、逆に低いと客観的と言える。

5.2 価値と物量の双対性

AHPなどの価値評価では同次形反復式： $x(t+1)=Ax(t)$ 、物量の代表である部品展開あるいは産業連関分析では非同次形反復式： $x(t+1)=Ax(t)+b$ で定式化され、前者は固有ベクトル、後者は連立方程式に帰着する。 $b=0$ で固有値解析、 $b\neq 0$ で逆行列解析となる。

5.3 自己同一性と疎外論(の拡大解釈)

『疎外』を自分を自分と認識できない自己疎外の状態と拡大解釈する。AHPでは自己同一性を前提として、通常「 $a_{ii}=1$ 」を仮定し比較行列 $A=\{a_{ij}\}$ を構成する。しかしながら、自己同

一性は当然であり、「 $a_{ii}=1$ 」は冗長として、対角要素 a_{ii} は欠落要素とした不完全情報 DAP として扱うのが無駄のないモデルとも考えられる。これを裏付けるかの如く、Saaty 整合度 CI では、自己疎外に対応して誤差の対角成分を除いた平均値として定義(3.11)されている。一方、DEA では意思決定主体 k の効率性測定時には、注目主体 k を疎外した状態と比較すべきとする超効率値(super efficiency, exclusive efficiency, 排他的効率値)の概念がある。居なくなって初めてその価値がわかる、という考え方である。マルクスによれば搾取ゆえの疎外なので、搾取という立場をとるなら当然の数理モデルであろう。なお、ここで基準とする絶対効率値に対する対象 DMU 群の絶対効率値の比率として定義する一般相対効率値なる概念を考えると、何を基準の客体として選ぶかで、注目する主体の様々な効率値を比率で表現できる。以上の観点より、現代の代表的な意思決定法である AHP と DEA について、AHP では主体の主観としての一対比較値、DEA では様々な主体/客体との相対比較を通しての一般相対効率値が主役を演じていると言える。この点に関して、マルクスは自己評価に甘く、他者評価に厳しいと言う点が興味深い。

5.4 感覚と物神性

第1章・第3節 SECTION 4:Fetishism of commodities において、Sehnerve 視神経を論じているが、auf den Sehnerv nicht als subjektiver Reiz des Sehnervs selbst と、マルクスは視覚を主観的ではなく客観的な刺激と理解している。AHP/ANP の発展形としての神経ネットプロセス NNP の立場からは、動的平均化により交換価値から商品価値が形成されるのと同様に、画素の情報を周辺との主観的な一対比較データとして取得し、不完全情報 DAP により一種の固有ベクトルとして視覚画像が形成される、と主張する。物神性に言及したついでに、多少普通と異なる実数の交換行列や比較行列を想定すると、項目数が偶数の時は実数固有値の存在が保証できないゆえの物神性の乱れについて付録1で指摘する。

5.5 平均と平均値と限界値

資本論では、平均利潤率、一般的利潤率、平均利潤、商品の平均価値、平均的労働量、社会的に必要な労働量、長期的価格、等と平均〇〇、平均〇〇率、と言った用語が頻出する。これは、マルクスによる数理的分析による効果と考えられる。数理的分析のためには、何らかの統計量を定義する必要が生じ、それが平均〇〇、平均〇〇率となった。時間平均のみならず、社会的平均という言葉にみられるアンサンブル平均の

概念もある。さらに、マルクス以降の限界革命も、平均を単に「算術平均」から限界値をも含む「拡大代表値」と読めば、同じ枠組みと解釈できる。

6. おわりに

商品間の交換価値 a_{ij} に基づき個々の商品価値 x_i が定まる/定める過程として、動的平均化プロセス DAP を提起する。AHP では数学的に最も直観的な(4.2)が採用されるが、これに限定されない。商品 i の価値 x_i は、「前時点における商品 j からみた注目する商品 i の価値」 $a_{ij}x_j(j=1,2,3,\dots,n)$ の何らかの平均化、代表値の関数として定まる、すなわち『商品価値は広い意味での固有ベクトルだ!!!』と主張する。

参考文献

[1] 篠原正明、篠原健：不完全情報 AHP の諸問題、平成 26 年度 日本大学生産工学部 第 47 回学術講演会 (2014.12).

[2] Chikako MIYAKE, et al: COMPLEX NUMBER PAIRWISE COMPARISON AND COMPLEX NUMBER AHP, ISAHP 2003, Bali, Indonesia, August (2003.8)

★資本論に関しては様々な資料を参考にした。深謝する。

付録1：偶数項目数時の物神性の乱れ

負値をも許容した実数比較行列を考えると、固有多項式の議論より、『奇数項目数時には少なくとも一つの実固有値の存在が保証されるが、偶数項目数時には保証されない。』と言える。AHP など通常仮定する比較行列 $A=\{a_{ij}\}$ とは異なるものの、 a_{ij} 値は実数なので動的平均化プロセス DAP に基づき価値が形成される、と考える。以下の例 A1.2 でも示すが、偶数項目数時には振動してしまう場合がある。

例 A1.1: 項目数 $n=3$ で実数価値ベクトル X が存在する場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda=1 \quad \square$$

例 A1.2: 項目数 $n=2$ で振動する場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \lambda=1+i$$

他の固有値は $\lambda=1-i$ で、実数価値ベクトル X は存在しない。偶数項目数時の物神性の乱れと言える。□

比較行列 $A=\{a_{ij}\}$ に複素数を許容する複素数 AHP[2]では複素数価値ベクトルが存在しうが、実数比較行列でもその可能性がある事を示した。ここで、複素数により実数次元とは別次元のある種のあいまいさ(振動して定まらない様、等)を表現する。