

対数について

日大生産工

○渡里 望

1. まえがき

対数関数は三角関数、指数関数とともに高等学校数学Ⅱで扱われ、受験数学の出題範囲内で必須問題である。大学初年次でも理系、文系に共通に取り扱われ基礎数学の中で重要な項目の一つである。生産工学部では一年生前年に設置されている「微分積分学Ⅰ」（必修科目2単位）では指数関数と関連して、指数関数の逆関数としての a を底とする対数として導入されている。そしてこの a を「 e 」を底とする対数、高等学校数学Ⅱで習う自然対数の定義となる。この「 e 」が「ネイピアの数」と呼ばれるものである。対数の発見はNapier (John Napier(1550-1617))によるもので、自然科学に与えた影響は大きく、教育的な立場からも対数について考えたい。

2. 対数の定義と性質

$$a^m = M \Leftrightarrow m = \log_a M \quad (1)$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad (2)$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (3)$$

$$\log_a M^k = k \log_a M \quad (4)$$

3. 自然科学への適用

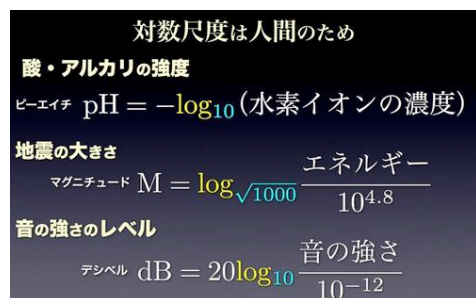


図 1 (4)

対数尺度にわざわざ変換する大きな理由の1つは、分かりやすくするためである。小さすぎる数値と大きすぎる数値は、現象を把握するのに不便である。

例えば、酸・アルカリの強度は、溶液中の水素イオン H^+ の濃度が指標となる。水素イオン濃度が0.01 [mol/l] の塩酸、0.000000000001 [mol/l] の水酸化ナトリウム水溶液といわれても分かりにくいので水素イオン濃度を対数で変換したのがpHである。pHが2の塩酸、11の水酸化ナトリウム水溶液と言い換えれば分かりやすい⁽⁴⁾。逆に、地震の大きさ（規模）を表すエネルギーの単位は [J (ジュール)] であるが、その数値は大きい。関東地震（関東大震災、1923年）は 63×10^{15} [J]、東北地方太平洋沖地震（東日本大震災、2011年）は 2×10^{18} [J] である⁽⁴⁾。そこで、エネルギーを対数で変換したのがM（マグニチュード）である。今回の東北地方太平洋沖地震の当初の発表ではマグニチュード (magnitude) は 8.8 でしたが、その後、9.0 に修正された。地震のエネルギーを E、マグニチュードを M とすると、次式が成立する。

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

M=8.8 のときのエネルギーを E_1 、
M=9.0 のときのエネルギーを E_2 とすると、

$$\log_{10} E_1 = 4.8 + 1.5 \times 8.8 = 18$$

$$\log_{10} E_2 = 4.8 + 1.5 \times 9.0 = 18.3$$

であり、対数の性質(3)から、

$$\log_{10} E_2 - \log_{10} E_1 = \log_{10} \frac{E_2}{E_1}$$

したがって、

$$\log_{10} \frac{E_2}{E_1} = 0.3$$

On the logarithme
Nozomu WATARI

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{0.3} = 1.99526 \dots$$

$$\doteq 2.0$$

エネルギーは2倍になる。

4. ネイピアの対数

ネイピアの時代15～16世紀、大航海時代において航海術に必要とされていた天文学では桁数の多い「掛け算」に多くの時間がかかることから天文学者にとってそれは重労働であった。しかし、当時、デンマークの天文学者ティコ・ブラーエ(1546-1601)は「掛け算」を「足し算」に変えて計算する方法を三角関数を用いて考えていた。次式(5)は高校数学IIで現れる三角関数の積を和に直す公式だが、この計算の方法がネイピアに伝わり、対数の着想につながった。

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \quad (5)$$

ネイピアはその基本として下図2では2を何回かかけた結果の数(真数)とその回数(対数)を対応させた表を作り、上の段で $4 \times 8 = 32$ に対して下の段で $2 + 3 = 5$ であることに着目して4の対数2と8の対数3の和が5となることから逆に積32を求める。つまり(2)の右辺から左辺への利用である。しかしこの表(2')では値がとびとびであり、また、三角関数の値は当時かなり精密な三角関数表ができていたが、もっと直接掛け算の値を求めたい、あらゆる数値の掛け算ができるようにしたいと考えた。そのために彼は整数値に対する対数ではなく1度を60等分した1分刻みの三角関数の値に対する対数表を作成した。当時、指数と小数点の表記の概念が完成しておらず、また指数と対数の対応関係(1)が把握されていたわけでない時代に、1分刻みの角度に対するsineの値を求めるため、また、小数点表示をなるべく避けるために半径の大きい円を考えた。例えば、 $r=1$ として

$$r \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.7320508}{2} = 0.8660254 \dots$$

であるが、小数点表示を避け、

$$r = 10^7 \text{として } 10^7 \times 0.8660254 \dots = 8660254$$

とすることによって整数表示を用いた。1614年にMirifici Logarithmorum Canonis Descriptio(英語訳:Description of the Wonderful Canon of Logarithms: 驚くべき対数規則の構成)の第1章に記述されている

英文: The Logarithme therefore of any sine is number very nearly expressing the line which increased equally in the mean time, while the line of the whole sine decreased proportionally into that sine, both motions being equal-timed, and the beginning equally swift

最初のLogarithme(ロガリズム)はLogos(神の言葉, 比)とギリシャ語Arithmos(数)を合わせて、ネイピア氏によって考案された造語である。この英文の和訳を下記に記す(1)。

「任意のsineのLogarithmeとは、次の線分を非常に近く表現する数のことである。その線分は平均的な時間で等しく増加しており、一方、全sineの方の線分は、比例的にそのsineに向かって減少している。このとき両方の線分の運動は等しい時間で行われ、またははじめは同じ速さを持っている。」

たいすう かいすう
対数とは**回数**

対数表＝回数表

$$4 \times 8 = 32$$

積

1	2	4	8	16	32
---	---	---	---	----	----

→真数

2をかけた回数

0	1	2	3	4	5
---	---	---	---	---	---

→対数

$$2 + 3 = 5$$

32の対数

4の対数

8の対数

かけ算

$$\log 4 \times 8 = \log 4 + \log 8$$

↓
たし算

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \text{回数 } 5 \end{array} = \begin{array}{c} \parallel \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} \parallel \\ 3 \end{array}$$

図2⁽³⁾

桁数の多い計算が天文学などで精密な計算を必要としたためネイピアは全ての角度に対するsineの値に対する対数を求めることを目標とした。ネイピアの対数は三角関数sinの値を 10^7 倍しその値に対する0.9999999を底とする対数を求めた。すなわちネイピアの対数は

$$10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7} \right)^n$$

にnを対応させるものである。参考文献:

- (1) 市民の数学「対数」対数の誕生・成長・発展 成田収
- (2) 話題源数学「対数」対数の誕生・成長・発展
- (3) 人の星とともにある数学 空間情報クラブ 第5回
- (4) 対数の発見がもたらした大航海時代と技術革新 JBpress
- (5) Napier's ideal construction of the logarithm Denis Roegel