ISSN 2186-5647

2-40

２次遅れＤＡＰならびに双測定ＤＡＰ

――数理モデルと項目数n=2 の計算実験例――

日大生産工(非常勤)　○篠原　正明
情報システム研究所　　篠原　健

１．はじめに

１次遅れ項x(t-1)のみを考慮する従来のDAP 更新式は、簡単化すれば「x(t)=Px(t-1)　(1.1)」と表現できる。本論文ではx(t-1)のみならず２次遅れ項 x(t-2)を考慮した更新式「x(t)=Px(t-1)+Qx(t-2)　(1.2)」を持つ DAP (Second-order lag DAP, 略して SL-DAP）を提案する。さらに２つの一対比較データ測定系を持つ DAP（略して、双測定 DAP, Bimatrix DAP）との関連性についても考察する。なお、提案するSL－DAP ならびに双測定DAP は、固有値問題としてとらえると、２次固有値問題QEP[1]に帰着され、x(t)の２次項等の非線形項を含むが１次遅れ項に限定されるQDAP[2]とは本質的に異なる。

２．SL－DAP の更新式

２次遅れを持つSL－DAP 更新式の一般形を(2.1)に示す。

x(t)=Px(t-1)+Qx(t-2)　(2.1)

完全情報かつ算術平均を想定したSL－DAP の具体的な更新式を(2.2)に示す。

$$x(t) = \frac{\alpha}{n} Sx(t-1) - \frac{\beta}{n^2} Tx(t-2) \qquad (2.2)$$

ここで、α、βは補正係数で通常はα＝β＝１と設定、x(t)はｔ時点でのウェイトベクトル、ｎは項目数、ＳとＴは適当なｎ×ｎの一対比較データの加工行列である。

３．２つの測定系を持つDAP としての解釈

２つの一対比較行列R、Ｌを測定データとして持つDAP の更新式（3.1）を考える。

$$x(t) = \frac{1}{n}(R+L)x(t-1) - \frac{1}{n^2} RLx(t-2) \qquad (3.1)$$

ここで、R、Ｌ 共に一対比較行列であり、２つの測定系の１つ（例えば、右眼）での比較行列をR、他方（左眼）での比較行列をＬとすると、(3.1）の右辺第２項は左右の交叉項を表す(双測定系と『両眼vs 複眼』については付録１参照)。

定数倍λでの定常状態を想定すると、(3.2）が成立する。

$$x(t)=\lambda x(t-1)=\lambda^2 x(t-2) \qquad (3.2)$$

固有ベクトルｘが満たすべき方程式は（3.3）で与えられる。

$$(\lambda^2 I-\lambda(R+L)/n+RL/n^2)x=(\lambda I-R/n)(\lambda I-L/n)x=0 \qquad (3.3)$$

固有方程式は(3.4)で与えられる。

$$\det(\lambda^2 I-\lambda(R+L)/n+RL/n^2)=\det((\lambda I-R/n)(\lambda I-L/n))=0 \qquad (3.4)$$

４．２次遅れDAP（SL－DAP）と双測定系DAP の比較

(2.2）と（3.1）を比較すると、(4.1）を得る。

$$\frac{\alpha}{n} S = (R+L)/n \qquad \frac{\beta}{n^2} T = RL/n^2 \qquad (4.1)$$

(4.1)において、α=1, β=1 とすると、(4.2)を得る。

S=R+L,　T=RL　(4.2)

SL－DAP の１次遅れＳは右側と左側測定系の一対比較データの行列和情報が、２次遅れＴは、右側と左側測定系の一対比較データの行列積情報が対応している。さらに、固有方程式が重根を持つ場合、R=L=A　(4.3)を考えると、(4.4)を得る。

$S=2A$,　$T=A^2$　(4.4)

５．数値計算実験

２次遅れ DAP と双測定系 DAP は等価なので、一対比較行列ＲとＬを与えることにより、以下に双測定系DAP の過渡特性を数値計算実験により調べる。項目数n=2 では、対角要素=1 の前提では、ＲとＬは(5.1)となる。

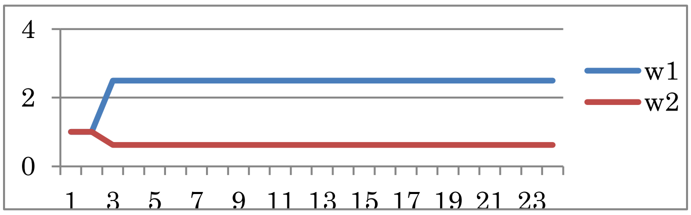
$$R=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 1 & c \\ d & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

[例A1] R=L(n=2)の例

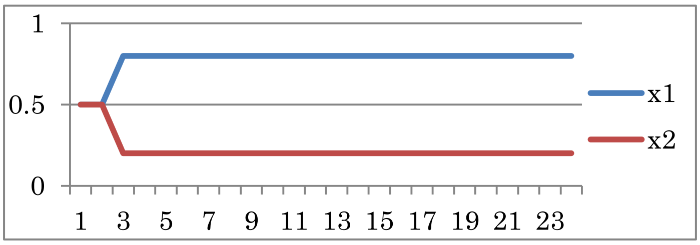
$$R=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

なお、2 次遅れ系なので、w1(1)=w2(1)=1, w1(2)=w2(2)=1, x1(1)=x2(1)=0.5, x1(2)=x2(2)=0.5 とt=1,2 で初期値設定する。t=3 で生ウェイトベクトルw、正規化ウェイトベクトルｘともに w^T=(2.5,0.625), x^T=(0.8,0.2)に収束する。

Second-order lag DAP and bimatrix DAP
Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA



（i）生ウェイトベクトル w=(w1,w2)T



（ii）正規化ウェイトベクトル x=(x1,x2)T

図 5.1：[例 A1]の過渡特性

一般に、R=L なら n>2 でも以下が成立。

{性質 5.1} R=L=A なら、双測定系 DAP の収束ウェイトベクトルは単測定系 DAP のそれに一致する。

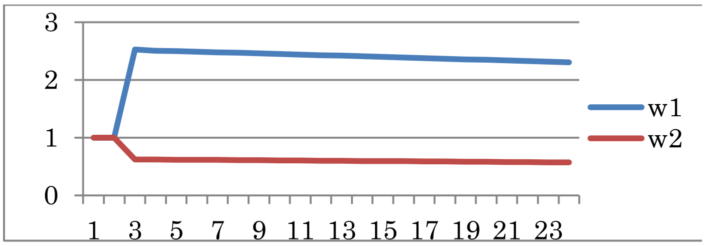
〈略証〉 $x(t)=\frac{1}{n}(2A)x(t-1)-\frac{1}{n^2}A^2x(t-2)$ (3.1) と $x(t)=\frac{1}{n}Ax(t-1)$ は等価。□

[例 A2] R≠L(n=2)の例

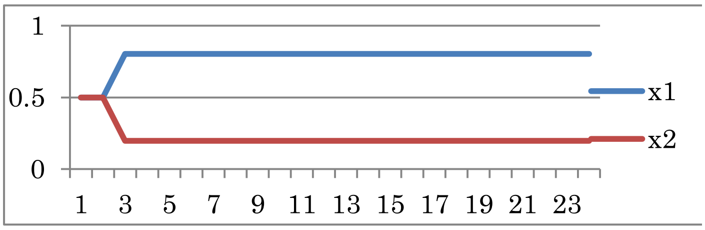
(5.1)において、L の(1,2)要素＝c を微小増加する。

$$R=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1/4 & 1\end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix}1 & 4.1\\ 1/4 & 1\end{pmatrix}$$

生 w は減少傾向、正規化 x は x^T=(0.8,0.2)付近に漸近収束。



（i）生ウェイトベクトル w=(w1,w2)T



（ii）正規化ウェイトベクトル x=(x1,x2)T

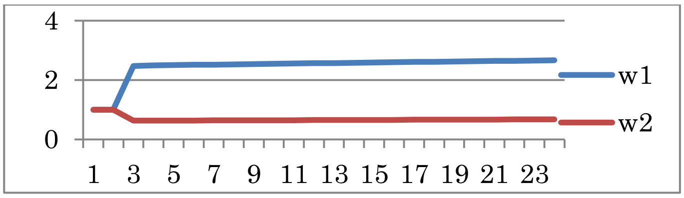
図 5.2：[例 A2]の過渡特性

[例 A3] R≠L(n=2)の例

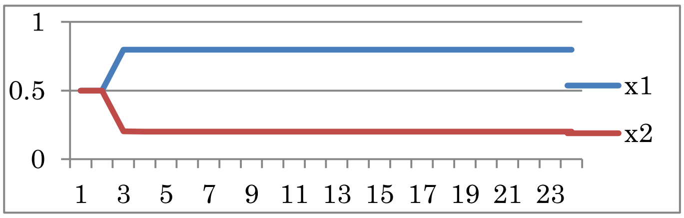
(5.1)において、L の(1,2)要素＝c を微小減少する。

$$R=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1/4 & 1\end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix}1 & 3.9\\ 1/4 & 1\end{pmatrix}$$

生 w は増加傾向、正規化 x は x^T=(0.8,0.2)付近に漸近収束。



（i）生ウェイトベクトル w=(w1,w2)T



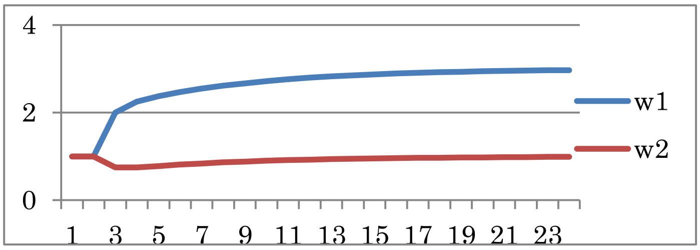
（ii）正規化ウェイトベクトル x=(x1,x2)T

図 5.3：[例 A3]の過渡特性

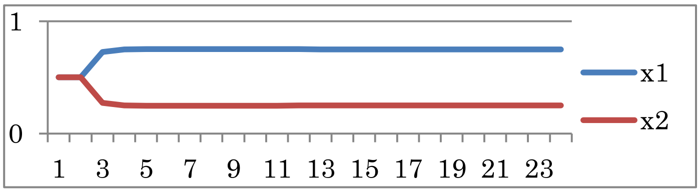
[例 A4] R≠L(n=2)の例(c=2 に減少)

$$R=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1/4 & 1\end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1/4 & 1\end{pmatrix}$$

生 w は増加傾向､正規化 x は x^T=(0.75,0.25)付近に漸近収束。



（i）生ウェイトベクトル w=(w1,w2)T



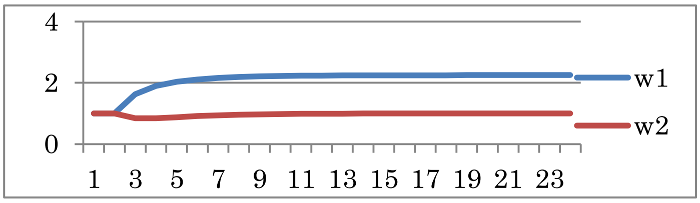
（ii）正規化ウェイトベクトル x=(x1,x2)T

図 5.4：[例 A4]の過渡特性

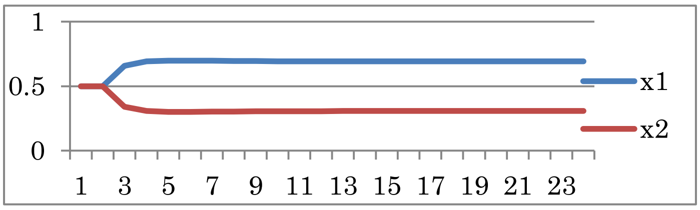
[例 A5] R≠L(n=2)の例(c=0.5 に更に減少)

$$R=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1/4 & 1\end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 1/4 & 1\end{pmatrix}$$

生 w は w^T=(2.25,1)､正規化 x は x^T=(0.7,0.3)付近に漸近収束。



（i）生ウェイトベクトル w=(w1,w2)T



（ii）正規化ウェイトベクトル x=(x1,x2)ᵀ

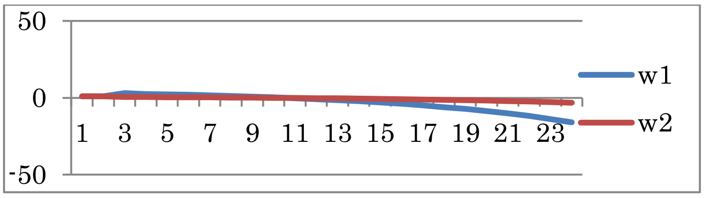
図 5.5：[例 A5]の過渡特性

例 A1～A3 において、R と L が多少異なっても、正規化ウェイトベクトルはほぼ同値に収束する。[例 A2]においてさらに時間経過した場合の生ウェイトベクトル w の傾向挙動(負値逆転の可能性)を調べるため、次の 2 例(例 A6,A7)で、L の(1,2)要素=c を、6 そして 7 と増加する。

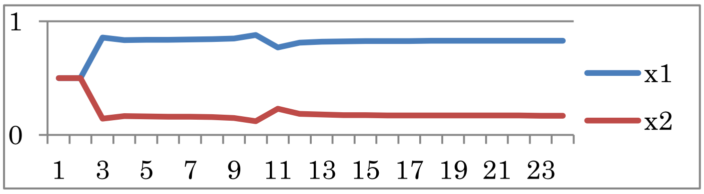
[例 A6] R≠L(n=2)の例：L の(1,2)要素=c を 6 に増加する。

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

生 w=(w1,w2)ᵀは時間と共に減少し、t=9 以降 w1,w2 同時に負値をとるが、正規化 x は t=9 以降、多少波打つが t=9 以前と同様な傾向に収束している。



（i）生ウェイトベクトル w=(w1,w2)ᵀ



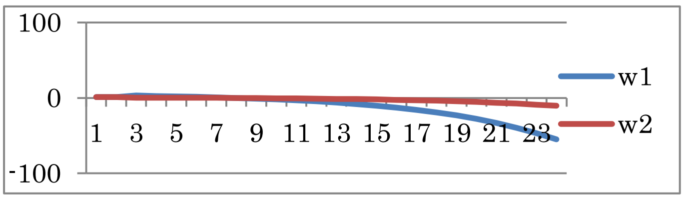
（ii）正規化ウェイトベクトル x=(x1,x2)ᵀ

図 5.6：[例 A6]の過渡特性

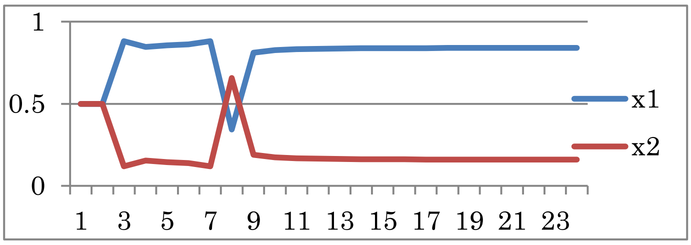
[例 A7] R≠L(n=2)の例:L の(1,2)要素=c を 7 に増加する。

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

正規化 x は t=6 以降、一時的に変動するが、その後 t=6 以前と同様な傾向に収束している(図 5.7)。例 A6, A7 ともに、各時点 t での生ウェイトベクトルの各成分の正負符号は同じ。



（i）生ウェイトベクトル w=(w1,w2)ᵀ



（ii）正規化ウェイトベクトル x=(x1,x2)ᵀ

図 5.7：[例 A7]の過渡特性

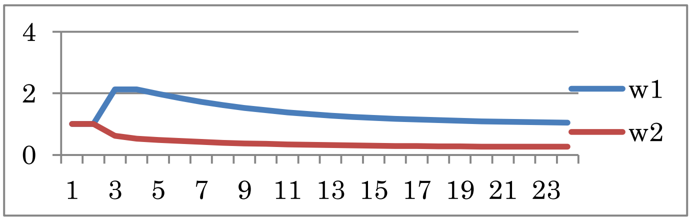
以上より、L の(1,2)要素＝c の減少に対しては比較的安定な特性を示す。一方、c の増加に対しては生ウェイト特性は正負逆転等の不安定な特性を示すが、正規化ウェイト特性では一時的に乱れるも、安定な特性を回復する。

次に、左右測定系の対称性を調べため、例 A4 の R と L を入れ替える。

[例 A8] R≠L(n=2)の例

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

生 w は減少傾向、正規化 x は xᵀ=(0.8,0.2)に漸近収束する(図 5.8)。明らかに、例 A4(図 5.4)の傾向とは異なる。



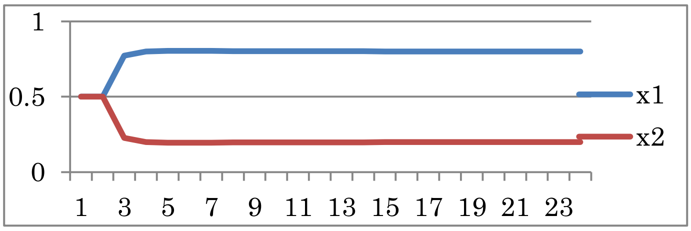


図 5.8：[例 A8]の過渡特性

片方が、例えば R, が逆比整合的な時に、R と L の交換に対して特性が不変である対称性の条件を次に与える(n=2)。

{性質 5.2}(5.2)で与えられる逆比整合的 R ならびに必ずしも逆比整合的ではない L に対して、R と L を交換しても同じ特性を示す。

$$R=\begin{pmatrix} 1 & p \\ 1/p & 1 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 1 & p^2/q \\ 1/q & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

〈略証〉RL=LR なので □

[例 A9] R≠L(n=2)の例

性質 5.2 に従えば、(5.3)と(5.4)は同じ特性を示す。

$$R=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1/4 & 1\end{pmatrix},L=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\ (5.3)\quad R=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 1/2 & 1\end{pmatrix},L=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1/4 & 1\end{pmatrix}\ (5.4)$$

一般には、二つの行列、R と L、の乗算で、交換律(RL＝LR)は不成立である、RL≠LR。従って、2，３章で定義する２次遅れ DAP と双測定系 DAP は入力 R と L の交換にたいして出力 x(t)を同一に保つことはできない。これを、左右測定系の原始非対称性と呼ぼう(付録 2)。

次に、比較の基準となる平等比較行列 U を考察する。

[平等比較行列 U の定義]

全(i,j)要素＝1 である比較行列を平等比較行列 U と定義する。$U=\{u_{ij}\}=\{1\}$, あるいは、$u_{ij}=1$　(5.5).

{定理 5.3} (n>2 でも成立)

任意の R に対して、L=U なら、w(t)=1, x(t)=1/n.

〈略証〉 (3.1)に $L=U=\{u_{ij}\}=\{1\}$,初期値として x(t-1)=1, x(t-2)=1,を代入すると、

$$x(t)=\frac{1}{n}(R+L)x(t-1)-\frac{1}{n^2}RLx(t-2)=\frac{1}{n}(R+L)\mathbf{1}-\frac{1}{n^2}RL\mathbf{1}=\mathbf{1}.\quad\square$$

単位比較行列 U は、全 n 項目が同ウェイトを持つ平等状態を意味する。定理 5.3 は、右眼入力が何であろうが、左眼入力が平等状態(白紙あるいは単色)ならば出力も白紙となることを意味する。また、R=U では類似の現象は発生せず、L=U のみに関係する特異な現象である。次に、R か L が普通の代数下での単位行列 I、零行列 O の場合について考察する。いずれの場合も一対比較に特徴的な逆比性は満たさない。零行列 O では、対角要素=1 の自己同一性すらも満たさない。これらは欠落要素が存在する場合に相当すると考えられる。

{定理 5.4} (n>2 でも成立)

R か L が単位行列 I ならば(R は逆比的、L=I とする)、R の主固有ベクトルに漸近的に収束。

〈略証〉 R,L の主固有値 λ_1,λ_2 は $\lambda_1\geqq 1$(R の逆比性仮定により、n=2 では常に等号成立)、$\lambda_2=1/n$ なので、L の効果は過渡減衰し、R の効果のみ残る。□

{定理 5.5} (n>2 でも成立)

R か L が零行列 O ならば(L=O とする)、双測定系 DAP は、単測定系 DAP あるいは 1 次遅れ DAP に帰着する。

〈略証〉 双測定系 DAP の更新式（3.1）は(5.6)となる。

$$x(t)=\frac{1}{n}(R+L)x(t-1)-\frac{1}{n^2}RLx(t-2)=\frac{1}{n}Rx(t-1)\qquad(5.6)\ \square$$

参考文献

[1]F. Tisseur and K. Meerbergen : The quadratic eigenvalue problem, SIAM Rev., 43 (2001).

[2]篠原正明,篠原健:非線形平均化プロセス QDAP 一般理論、平成 24 年度日大生産工第 45 回学術講演会(2012. 12).

【付録1】複数の比較行列を考慮する AHP(両眼 vs 複眼)

「Ⅰ．単一の比較行列を合成する方法」、「Ⅱ．個々の比較行列対応のウェイトベクトル(複数)から単一のウェイトベクトルを合成する方法」に大別できるが、本提案はいずれにも属さない。ヒトなどの両眼視系では、右眼画像と左眼画像から合成されるわけでもなく、右眼網膜上の一対比較データと左眼網膜上の一対比較データが単一の仮想網膜上の一対比較データに合成されるわけでもない。その間の何らかのプロセスで実現されている。それを解明する数理モデルの提案である。

◆用語(両眼 vs 複眼)について:複数の比較行列を考慮し、様々な、多角的な視点にもとづく意思決定アプローチなので、『複眼(compound eye)的』とも言えるが、生物学的には複眼は昆虫の眼であり、『AHP の両眼(binocular)視、多眼視アプローチ』が適切と思う。さらに、原始生物からの進化過程から見ても、レンズ眼の 1 つ目、2 つ目、3 つ目、などと、複数の個眼から構成される昆虫の複眼は区別すべきと思う。

【付録2】神経系の原始非対称性と行列の積

(3.1)において行列積 RL は線形写像の合成を表し、生体システムの神経系の左右交叉部がこのような仕組みを内包することを示唆する。2 つの行列 A,B の積について通常は交換律は成立しない(AB≠BA)。この事が神経系の左右非対称部位の根源的かつ数理的な裏付けを与えるので、これを原始非対称性と呼ぶ。A,B ともにスカラーならば AB=BA が成立し、対応する神経系も左右対称性を持つはずだが、そのようには作られていない。すなわち、原始非対称性を持つ左右交叉部の数理的近似モデルとして、A=R,B=L をマトリックス matrix とする直列システムが想定できる。

【付録3】3 次遅れ DAP ならびに 3 測定系 DAP

3 つの一対比較行列 R(Right),M(Middle),L(Left) を測定データとして持つ三つ目小僧 DAP の更新式を（A3.1）に示す。

$$x(t)=\frac{1}{n}(R+M+L)x(t-1)-\frac{1}{n^2}(RM+RL+ML)x(t-2)$$
$$+\frac{1}{n^3}(RML)x(t-3)\qquad(A3.1)$$