車両運動方程式と非線形タイヤ特性とからなる非線形車両数理モデルの

線形化手法に関する研究

日大生産工(院) ○伊澤 正樹 日大生産工 見坐地 一人 景山 一郎

1 まえがき

車両の運動性能解析は、横加速度が小さく線形 近似できる運動領域では平面2自由度モデルを基 本とし必要に応じてロール挙動との連成を考慮 できるヨー,横,ロール運動のメカニズム解析手 法が提案され車両設計の初期段階における簡易 的解析手法として用いられている(1)-(5).また旋回 中の加減速を含む運動は準定常状態の概念を導 入した解析手法⁽⁶⁾あるいは重心点スリップ角を 基準としたヨーモーメントで安定性を判定する 手法(7)など解析解算出の代替手法が提案・実用化 されている. 周知のように線形域から非線形域ま でのすべての車両運動を表現するためには剛体6 自由度の運動方程式を用いる必要があるが、非線 形運動方程式となるため一般には取り扱いが煩 雑であり, 商用ソフトウェアが実用化されている が数値解析による時系列計算を主とするもので ある.本報告では非線形運動方程式を非線形特性 タイヤも含めて線形表現する手法を示し車両特 性の線形解析への応用と将来的には車両運動制 御への応用展開に繋げていく.

2 解析手順

線形化手法の概略フローを図1に示す.車両の 非線形運動方程式とタイヤ特性を定義する.



Fig. 1. Analysis Flow of Linearized Model

車両ばね上6自由度,ばね下系,操舵系を含む 多自由度非線形運動方程式のテイラー展開と、タ イヤモデルのスリップ角偏微分よる接地荷重を 考慮した等価コーナリングパワー⁽⁸⁾の算出によ り,解析的に扱いやすい状態空間表現による線形 近似モデルを導出する.定常円旋回時は補助方程 式を用いて解析したい横加速度でのタイヤ等価 コーナリングパワーを求める.

3 運動方程式

1 座標系の定義

計算には必要に応じて3種類の座標を用いる. 図2aはばね上重心位置を原点に取り車両前方進 行方向をx軸としたボディ座標であり,ばね上の 運動を記述するために用いるISO座標である



Fig.2a Body Coordinate System

図2bにボディ座標と中間座標の関係を示す. 中間座標はx方向,y方向,ヨー運動はボディ座標 と一体に動き,路面に平行にx-y軸を取り車体に 作用する路面に平行な前後力,横力とばね下の上 下運動と記述する目的で用いる

図2cにタイヤ座標を示す,路面に平行にタイヤ 回転面をx軸,直角方向をy軸としてタイヤ発生力 を直接計算するために用いる.

Study on Linearization Method of Nonlinear Vehicle Mathematical Model consisting of Vehicle Equations of Motion and Nonlinear Tire Characteristics

Masaki IZAWA, Kazuhito MISAJI, and Ichiro KAGEYAMA

-225-



Fig.2b Medium Coordinate System



Fig.2c Tire Coordinate System

3. 2 運動方程式

表1に変数名一覧及び代表的な数値例を示す.

Table1 Model Parameters								
Parameters	Symbols	Values						
Sprung Mass	<i>m</i> ₂	1250 [kg]						
Unsprung Mass	m_1	30 [kg]						
Moment of Inertia	I_x, I_y, I_z	680, 1920, 2580 [kgm2]						
Tire Moment of Inertia	I_{yT} , I_{zT}	1.0, 1.0 [kgm ²]						
Product of Inertia	I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}	0, 0, -18.0 [kgm ²]						
Spring Rate	$K_{fr}, K_{fl}, K_{rl}, K_{rr}$	50,50,22.5,22.5 [kN/m]						
Damping Coefficient	$C_{fr}, C_{fl}, C_{rl}, C_{rr}$	2.4,2.4,2.4,2.4 [kNs/m]						
Tire Spring Rate	K _{tire}	265[kN/m]						
Cornering Stiffness	$C_{pfr}, C_{pfl}, C_{prl}, C_{prr}$	55,55,60,60 ×103 [N/rad]						
Tread	$T_{fr},T_{fl},T_{rl},T_{rr}$	0.765,0.765,0.75,0.75 [m]						
Distance between Axel and COG	$L_{fr},L_{fl},L_{rl},L_{rr}$	1.02,1.02,1.56,1.56 [m]						
Distance between Unsprung mass and COG	$H_{1fr},H_{1fl},H_{1rl},H_{1rr},H_1$	0.16, 0.16, 0.16, 0.16, 0.16 [m]						
Tire Radius	R_L	0.32 [m]						
Steer System Properties	I_s, K_s, C_s	0.05[kgm2]],127 [Nm/rad],4[Nms/rad]						
Tire Slip Angle	β	[rad]						
Steering Wheel Angle	α	[rad]						

位置を表す添え字(その1): 右前fr 左前 fl 左後 rl 右後 rr 位置を表す添え字(その2): 路面とタイヤとの接点0 ばね下1 ばね上2

座標の添え字:

ボディ B, 中間 M, タイヤ T

以下に計算に用いる運動方程式を示す.

● ばね上並進運動に関する運動方程式

 $m_2(\dot{u} + qw - rv) = F_x$ $m_2(\dot{v} + ru - pw) = F_y$ $m_2(\dot{w} + pv - qu) = F_z$

- ばね上回転運動の運動方程式 $I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + (I_z - I_y)qr - I_{xz}pq = M_x$ $I_y \dot{q} + I_{xz}(p^2 - r^2) + (I_x - I_z)rp = M_y$ $I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + (I_y - I_x)pq + I_{xz}qr = M_z$
- オイラー角とばね上角速度の関係 $\dot{\phi} = p + q \tan \theta \sin \varphi + r \tan \theta \cos \varphi$ $\dot{\theta} = q \cos \varphi - r \sin \varphi$ $\dot{\psi} = r \cos \varphi / \cos \theta + q \sin \varphi / \cos \theta$

ステアリング系の運動方程式
 ステアリング系は角度入力による運動方程式
 を用いた.

 $I_{s}\ddot{\delta} + C_{s}\dot{\delta} + K_{s}(\delta - \alpha) = \xi(C_{pfr} \cdot \beta_{fr} + C_{pfl} \cdot \beta_{fl})$ ただし既述の通り $\xi = 0$ として切れ 戻りを考慮せず等価*Cp*値に反映した⁽⁹⁾.

以下に作用荷重,モーメントを示す.

・ タイヤ横力

$$F_{y0ii_T} = -C_{pii}\beta_{ii}$$

 $\beta_{ii} = \tan^{-1}(v_{0ii_M}/u_{0ii_M}) - \delta_{ii}$
ただし $ii = fr, fl, rl, rr$
本検討では $\delta_{rl} = 0, \ \delta_{rr} = 0$

- ・ 路面入力 $F_{z1ii_M} = -K_{tire}(z_{1ii_M} - z_{0ii_M})$ ただし ii = fr, fl, rl, rr
- ばね下運動方程式
 *ż*_{1ii_M} = -(F_{z2ii_M} F_{z1ii_M} m₁g)/m₁
 ただし *ii* = fr, fl, rl, rr
- 重力
 - $egin{aligned} F_{xg_B} &= -m_2g\sin heta\ F_{yg_B} &= m_2g\sinarphi\cos heta\ F_{zg_B} &= m_2g\cosarphi\cos heta\ Ezg_B} &= m_2g\cosarphi\cos heta\ Ezg_D &= m_2g\cosarphi\cos heta\ Ezg_D &= m_2g\cosarphiodout \ Ezg_D &= m_2g\circarphiodout \ Ezg_D &= m_2g\circarphiodout\ \ Ezg_D &= m_2g\circarphiodout \ Ezg_D$

4 車両運動方程式の線形化

運動方程式を多変数関数と考え,そのテイラ ー展開の1次近似からヤコビ行列を求め初期値 を与えたものを線形システム行列Aとする.同様 に入力行列Bは入力に関する非線形方程式に初 期値を与えたものとする.

- 非線形運動方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$ $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x))^T$
- テイラー展開式 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0} \boldsymbol{x} + g(0)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{O}^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0}$, B = g(0)
- 状態空間表現 *x*

$$x = Ax + Bu$$

ただし

x =

 $[u, v, w, p, q, r, \varphi, \theta, \psi, zr_{fr}, zr_{fl}, zr_{rl}, zr_{rr},$ $Z_{1fr_M}, Z_{1fl_M}, Z_{1rl_M}, Z_{1rr_M},$ $\dot{z}_{1fr_M}, \dot{z}_{1fl_M}, \dot{z}_{1rl_M}, \dot{z}_{1rr_M}, \delta, \dot{\delta}]^T$ $\boldsymbol{u} = [\alpha, z_{0fr M}, z_{0fl M}, z_{0rl M}, z_{0rr M}]^{T}$

行列 A, B の具体的表現を巻末付録に示す.

タイヤ特性の線形化

マジックフォーミュラ式⁽¹⁰⁾をスリップアン グルで偏微分し等価コーナリングパワーCp を求 めシステム行列に適用する

 $Y = D \cdot \sin[C \cdot \tan^{-1}\{B \cdot x - E(B \cdot x - \tan^{-1}B \cdot x)\}] + S_V$ $x = X + S_H$ (tetil $X \rightarrow \beta$)







Fig. 5 Comparison Results

図5に表1の計算パラメータを用いて u=30[m/s]での線形化モデルと非線形モデルの代 表的平面運動と上下運動の結果を示す図5左側 に横加速度が3.0[m/s²]になるよう調整した操舵 角によるステップ入力の結果を,また右側には路 面入力0.02[m]のステップ段差入力の結果を示す. 非線形モデルと良い一致が確認できる.

6 定常円旋回時の挙動

6.1 切り増し操舵時の挙動解析

定常円旋回の解析のために補助方程式を用い 等価コーナリングパワーを求める.図6に表1の パラメータを用いて求めた等価Cp値その他の例 を示す.計算の際の解析点を横加速度 Ay=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [m/s²]とし点で示す.



Fig. 6 Equivalent Cornering Power

また、この時の等価Cpその他の値を表2に示す. Table2 Parameters on Steady State Turn

$A_y[m/s^2]$	$F_{z1_M}[N]$			$C_p[N/rad]$				
	fr	fl	rl	rr	fr	fl	rl	rr
0	4009.7	4009.7	2707.9	2707.9	55114	55114	59324	59324
1.000	4295.6	3698.2	2575.2	2866.2	57945	50823	56061	61999
2.000	4597.4	3398.0	2428.9	3011.0	59596	45722	51541	63083
3.000	4902.8	3095.1	2280.3	3156.9	59634	39826	46149	62666
4.000	5213.8	2788.1	2128.4	3304.7	57698	33297	40016	60510
5.000	5532.2	2475.6	1972.2	3454.9	53296	26317	33288	56327
6.000	5860.7	2155.8	1810.0	3608.2	45704	19084	26124	49761
7.000	6202.8	1827.5	1639.7	3764.6	33762	11807	18709	40379

この等価Cpを用いて定常円旋回をさせ、さらに舵 角を切り増した際の車両挙動の比較を非線形モ デルと行った結果を図7に示す.両者の良い一致 が確認できるとともに、舵角切り増し後の車両挙 動は横加速度ごとに異なっていることが確認で きる.



6.2 タイヤ特性違いでの車両挙動

極端なタイヤ特性として前輪44000/後輪72000(US特性)および前輪71500/後輪42000(OS特性)を与えた際の解析を行った.根軌跡の結果を図8,周波数応答の結果を図9に示す.US特性の根軌跡はどの横加速でも振動的となり、またヨーレートの周波数応答は定常ゲインの低下が確認でき典型的US特性を示す.一方のOS特性の根軌跡は横加速度7[m/s²]以外は虚数根をとらず非振動的となり,一部は正の実根となる場合があり典型的OS特性を示す.また周波数特性も非振動的となる



Fig. 9 Comparison of Frequency Response

7 まとめ

ばね上(6 DOF), ばね下系 (4×1 DOF), ステア リング系(1 DOF)およびタイヤ特性を含む非線形 車両運動方程式と本質的に同等な線形化モデル を導出した.

1)高横加速度非線形領域を含む車両挙動全体 に渡り固有値解析,0S/US特性,応答性,収れん 性等の線形解析・評価が可能となる.

2) 定常円旋回の場合,補助方程式を用いてタ イヤ等価コーナリングパワーを求めることによ り線形化モデルを適用することができる. 今後はシステム行列を用いて平面運動と上下 運動を同時に最適化する車両制御系の検討をし ていく.

参考文献

(1) 樋口実,種子田和宏,芝端康二,皆川正明: ばね上挙動が車両運動性能に与える影響(第1報) -動的なロール挙動と操舵応答特性-,自動車技術 論文集, Vol. 33, No. 4, p. 121-126

(2)酒井英樹,穂積仁,杉山瑞穂:ロール特性が 車両運動に及ぼす影響,自動車技術前刷集, No. 125-05, p. 13-18, 2005

(3) 皆川正明:車体のロールを考慮に入れた3 自由度車両モデルのコンセプト,自動車技術論文 集, Vol. 39, No. 4, p. 17-22

(4)藤岡健彦,山本真規:自動車の断面一輪モ デルとその特性,自動車技術前刷集,No.91-10, p. 19-24, 20105075 (2010)

(5) 山本真規,藤岡健彦:車両パラメータのロ ール・平面連成運動への影響およびパラメータ間 の相互関係,自動車技術前刷集,No.31-15S, p. 753-758, 20155142 (2015)

(6) Masato Abe: A Theoretical Analysis on Vehicle Cornering Behaviors in Acceleration and in Braking , Vehicle System Dynamics, 15: sup1, 1-14

(7) 芝端康二,島田和彦,泊辰弘:ヨーモーメン ト制御による車両運動性能の向上について,自動 車技術, Vol. 47, NO. 12, 1993

(8) 安部正人:自動車の運動と制御 車両運動 力学の理論形成と応用「第2版]

(9)株式会社ブリヂストン編:自動車用タイヤの基礎と実際

(10) H.B.Pacejka: Tire and Vehicle Dynamics Third Edition, 2012, Butterworth-Heinemann

(付録)

