

# 量子ウォーク

日大生産工 ○町田 拓也

粒子のランダムな運動を表わすランダムウォークは、様々な現象を記述することができ、多方面で応用されてきた。ランダムウォークの量子版である量子ウォークも量子コンピュータの基礎理論構築と関連し、その応用が考えられている。一例として、量子探索アルゴリズムが挙げられる。Groverの探索アルゴリズムは完全グラフ上の量子ウォークと考えられる。その他にもいくつかのグラフ上の探索アルゴリズムに量子ウォークは応用されている<sup>1, 2)</sup>。量子ウォークは2000年頃より活発に研究され始め、各モデルに対する様々な定理の導出とともに、これまでに興味深い性質が明らかにされてきた。日本語の解説書として、今野<sup>3, 4)</sup>、町田<sup>5)</sup>がある。

以下、ランダムウォークとの比較を交えつつ、量子ウォークについて簡単に説明する。今回注目する1次元格子上の量子ウォークに対応するランダムウォークは、時刻  $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$  で、 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  上の、ある場所  $x$  に存在する粒子が、時刻  $t+1$  に確率  $p$  で  $x-1$  に、確率  $q (= 1-p)$  で  $x+1$  に移動するようなモデルである (図1参照)。量子ウォークでは確率  $p, q$  の代わりに、 $2 \times 2$  の確率振幅行列  $P, Q$  を考える。但し、 $P+Q$  はユニタリ行列になっているものとする。

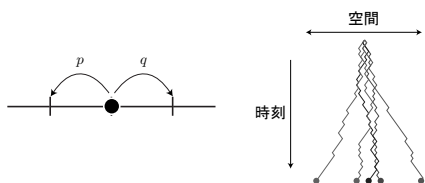
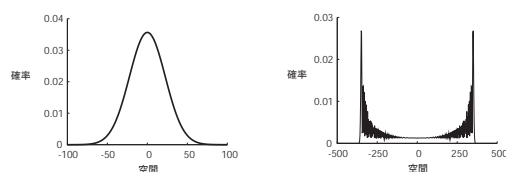


図 1: ランダムウォーク

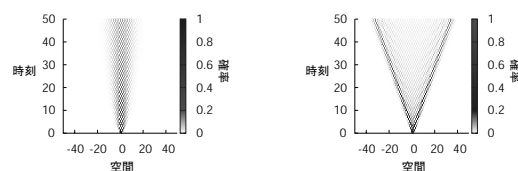
量子ウォークとランダムウォークの違いの1つは、粒子の空間的な分布 (確率分布) である (図2参照)。よく知られているように、ランダムウォークの確率

分布は二項分布であり、空間を  $\sqrt{t}$  でスケーリング変換した確率分布は、中心極限定理により、 $t$  を十分大きくしたとき、正規分布 (ガウス分布) で近似される。一方、量子ウォークの確率分布は、 $t$  で空間をスケーリング変換することで、逆正弦則の確率密度関数のような、ある確率密度関数で近似される。量子ウォークの確率分布がもつ大きな特徴は、ゆらぎと鋭いピークをもつことである。粒子が原点から出発したとき、確率分布はランダムウォークの場合  $O(\sqrt{t})$  で広がるが、量子ウォークの場合は  $O(t)$  となる (図3参照)。



(a) ランダムウォーク (b) 量子ウォーク

図 2: 確率分布の例



(a) ランダムウォーク (b) 量子ウォーク

図 3: 確率分布の時間発展

さて、量子ウォークは、一般にグラフ上で定義できるが、ここでは1次元格子上で定義される量子ウォークの標準的なモデルを説明する。まず、時刻  $t$  において各場所  $x \in \mathbb{Z}$  に、2次の複素ベクトル  $|\psi_t(x)\rangle \in \mathbb{C}^2$  を考える。但し、 $\mathbb{C}$  は複素数全体の集合である。量子ウォークの分野では、これらのベクトルは確率振

Quantum walk

Takuya MACHIDA

幅ベクトルと呼ばれる.

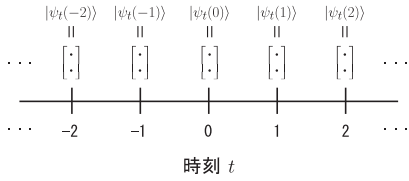


図 4: 各格子点上の確率振幅ベクトル

量子ウォークの時間発展を定義するために, 以下の 2 つの行列

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (1)$$

を導入する. 但し,  $P + Q$  はユニタリ行列になっているものとする. 量子ウォークの時間発展は, 以下で定義される (図 5 も参照).

$$|\psi_{t+1}(x)\rangle = P |\psi_t(x+1)\rangle + Q |\psi_t(x-1)\rangle. \quad (2)$$

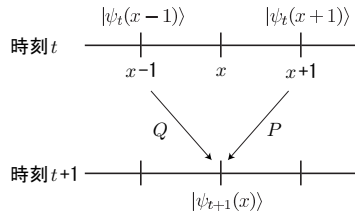


図 5: 時間発展のダイナミクス

さらに, 初期状態が

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} \left\| |\psi_0(x)\rangle \right\|^2 = 1, \quad (3)$$

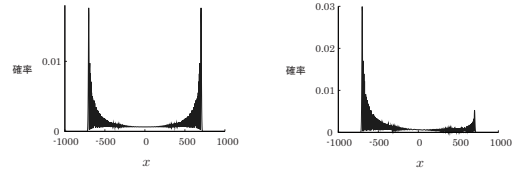
を満たすもとで, ウォーカーが時刻  $t$  で場所  $x$  に観測される確率を

$$\mathbb{P}(X_t = x) = \left\| |\psi_t(x)\rangle \right\|^2, \quad (4)$$

で定義する. ここで,  $X_t$  は時刻  $t$  におけるウォーカーの位置を表す確率変数である. 初期状態を

$$|\psi_0(x)\rangle = \begin{cases} T[\alpha, \beta] & (x = 0), \\ T[0, 0] & (x \neq 0), \end{cases} \quad (5)$$

とすると, 図 6 のような確率分布が得られる. 但し,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  は,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  を満たすものとする.  $T$  は転置作用素である.



(a)  $\alpha = 1/\sqrt{2}, \beta = i/\sqrt{2}$  (b)  $\alpha = 1, \beta = 0$

図 6: 時刻 1000 の確率分布  $\mathbb{P}(X_{1000} = x)$  ( $a = b = c = -d = 1/\sqrt{2}$ )

ここで紹介した量子ウォークに対しては, 次の極限定理が Konno<sup>6)</sup> により導出されている. 実数  $x$  に対して,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{X_t}{t} \leq x \right) \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{\pi(1 - y^2)\sqrt{|a|^2 - y^2}} I_{(-|a|, |a|)}(y) \\ & \quad \times \left[ 1 - \left\{ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{(a\alpha\bar{b}\beta + \bar{a}\alpha b\beta)}{|a|^2} \right\} y \right] dy. \end{aligned} \quad (6)$$

但し,

$$I_{(-|a|, |a|)}(x) = \begin{cases} 1 & (-|a| < x < |a|), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (7)$$

## 参考文献

- 1) S. Venegas-Andraca, Quantum Walks for Computer Scientists, vol.1, Morgan & Claypool Publishers, (2008).
- 2) S.E. Venegas-Andraca, “Quantum walks: a comprehensive review,” Quantum Information Processing, vol.11, no.5, (2012), pp.1015–1106.
- 3) 今野紀雄, 量子ウォークの数理, 産業図書, (2008).
- 4) 今野紀雄, 量子ウォーク, 森北出版, (2014).
- 5) 町田拓也, 図で解る量子ウォーク入門, 森北出版, (2015).
- 6) N. Konno, “Quantum random walks in one dimension,” Quantum Information Processing, vol.1, no.5, (2002), pp.345–354.