

分数階微分とミッタークレフラー関数

日大・生産工 ○ 永井 敦

1 はじめに

非整数階微分の歴史は古く、ライプニッツまで遡る。また非整数階微分はいわゆる机上の空論では無く、通常の微分方程式ではモデル化が困難な自然現象が非整数階微分を導入することによりうまくフィットする例も少なくない。本講演では非整数階微分の一定義を与えるとともに、そこで重要な役割を果たすミッタークレフラー関数についても解説したい。

2 非整数階微分の定義

はじめに $a > 0$ に対して、 $K(a; t)$ を次式で定義する。

$$K(a; t) = \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} \quad (t > 0, a > 0) \quad (1)$$

初等的な計算により、以下の性質を満たす。

$$\frac{d}{dt} K(a+1; t) = K(a; t) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} K(a; t) * K(b; t) &= \int_0^t K(a; t-s) K(b; s) ds \\ &= K(a+b; t) \end{aligned} \quad (3)$$

a 階積分演算子 I^a を次式で定義する。

$$I^a f(t) = K(a; t) * f(t) = \int_0^t K(a; t-s) f(s) ds \quad (4)$$

$a = 1$ のとき、 I は 1 階積分、また $a = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}f)(t) &= K(\tfrac{1}{2}; t) * (K(\tfrac{1}{2}; t) * f(t)) \\ &= (K(\tfrac{1}{2}; t) * K(\tfrac{1}{2}; t)) * f(t) \\ &= K(1; t) * f(t) = \int_0^t f(s) ds \end{aligned}$$

より、 $I^{\frac{1}{2}}$ は $\frac{1}{2}$ 階積分演算子と見なすことができる。

非整数階積分を用いて、Caputo の非整数階微分演算子 D^a を以下の通り定義する。 m を $m-1 < a < m$ を満たす正の整数とすると、

$$\begin{aligned} D^a f(t) &= I^{m-a} D^m f(t) \\ &= \int_0^t K(m-a; t-s) u^{(m)}(s) ds \end{aligned} \quad (5)$$

3 チェンの方程式

流体中の球形粒子の運動を記述するチェンの方程式の初期値問題を考える。

$$\begin{cases} (D + pD^{\frac{1}{2}} + q)u = \beta K(\tfrac{1}{2}; t) + f(t) \\ u(0) = \alpha \end{cases} \quad (6)$$

p, q は正定数、 $\{\alpha, \beta, f(t)\}$ は与えられたデータとする。

この方程式を解くために、 $u(t), f(t)$ が次の形にビューズー展開されることを仮定する。

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j K(\tfrac{j+2}{2}; t) \\ f(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j K(\tfrac{j+2}{2}; t) \end{aligned}$$

上の式をチェンの方程式に代入し、係数比較すると、以下の線形漸化式を得る。

$$u_{j+2} + pu_{j+1} + qu_j = f_j, \quad u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta \quad (7)$$

これを解いて、もとのビューズー展開式に代入すると、方程式 (6) の解は次の通りである。

$$u(t) = \alpha A_0(t) + \beta A_1(t) + \int_0^t B(t-s)f(s)dx$$

$$A_0(t) = \frac{-\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_+^{j-1} - \lambda_-^{j-1}) K(\frac{j+2}{2}; t)$$

$$A_1(t) = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_+^j - \lambda_-^j) K(\frac{j+2}{2}; t)$$

$$B(t) = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_+^{j+1} - \lambda_-^{j+1}) K(\frac{j+2}{2}; t)$$

ここで $\lambda = \lambda_{\pm} = -\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ である。
これらの関数はミッタークレフラー関数

$$E_a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(aj+1)} \quad (8)$$

を用いて、表すことができる。例えば

$$A_1(t) = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \sum_{j=0}^{\infty} (E_{1/2}(\lambda_+ t) - E_{1/2}(\lambda_- t))$$

である。

さらにミッタークレフラー関数は次の興味深い関係式を満たす。

$$D^a E_a(\lambda t^a) = \lambda E_a(\lambda t^a)$$

この式は、ミッタークレフラー関数は a 階微分すると再びミッタークレフラー関数になること、言い換えれば指数関数の非整数階版であることを意味する。

本講演では、分数階微分とミッタークレフラー関数の関わりについて講演し、時間があればその差分化、すなわち分数階差分と離散ミッタークレフラー関数についても述べる予定である。

References

- [1] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, 1999, Academic Press.
- [2] 永井 敦, 「ミッターク・レフラー関数の差分化－非整数階差分とは?」, 数理科学 No. 483 (2003 年 9 月号) pp. 50–55, サイエンス社.
- [3] A. Nagai, *An Integrable Mapping with Fractional Difference*, Journal of the Physical Society of Japan **72** (2003) pp. 2181–2183.
- [4] A. Nagai, *On a certain fractional q -difference and q -Mittag-Leffler function*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics Supplement **10**(2003) pp.133–142.
- [5] A. Nagai and Y. Kametaka, *Solutions to Some Fractional Differential Equations and Their Integrable Discretizations*, Journal of the Physical Society of Japan **76**(2007) p. 094002 (9 pages).