ISSN 2186-5647

1-6

鋼構造平面骨組のひずみ硬化を考慮した応力法による弾塑性崩壊解析の定式化

日大生産工　○　川島　晃

1. はじめに

鋼構造骨組の弾塑性応力場に着目すると、応力法は塑性化断面の相対変位に関する不連続性（図１）に適合する断面力（合応力 m,n）を独立な未知量として扱うことができる。したがって、材料非線形問題の有力な解析手法であるが、幾何学的非線形問題には不向きとされてきた[1)]。筆者は軸方向力と剛体回転による連成項（図２の $\Delta n^2_{(p)}$）を独立成分とする釣合式および、曲げ変形との連成項（図３の $n_{(p)}\cdot\delta$）を考慮した構成式を定式化し、節点変位の進行とともに各部材要素の座標系を更新する幾何学的非線形解析を可能とした[2)~4)]。また、釣合式の解法に一般逆行列[5)、6)]を用いると、骨組の冗長性を表す基本量である不静定余力が求まることを示した[7),8)]。

本研究では応力法が、不静定余力および初期ひずみや温度変化によるひずみを扱うとき、弾塑性崩壊解析上の魅力を秘めていることに着眼し、骨組全体における釣合式および部材変形と節点変位関係を表す適合行列の解法に一般逆行列を応用するものである。

本報告では前報[9),10)]に引き続き、変位法と同様に、幾何学的非線形性を考慮した弾性解析を準用する移動硬化型塑性ヒンジ法の定式化手法を示す。なお、Baushinger 効果の理論的モデルとしては Ziegler の修正硬化則を適用する。

2. 基本関係式

2.1 座標と記号および仮定事項

全体座標と部材の局所座標は、何れも右手系とする。定式化に用いる記号は、小文字細字はスカラーを、小文字太字はベクトルを、大文字太字は行列を表す。ベクトルおよび行列の転置は肩付き添字 T で表す。なお、弾性状態の記号は上付添字 e を用い、断面の全塑性化状態の記号は上付添字 0 で表す。増分記号は Δ で表す。部材の力学的諸量と幾何学的諸量は図２と図３および図４に示す記号で表す。以下に主な記号を示す。

(A),(B) ：部材の材端が接続する節点名の総称

(N,p) の N ：単に部材の材端を表す印

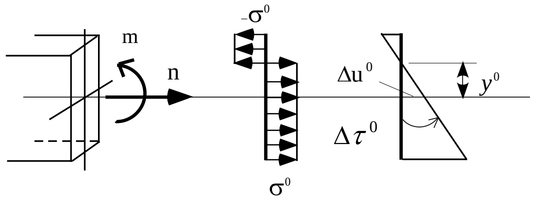
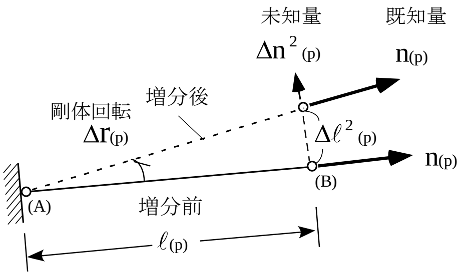


図１　断面の塑性変位成分($\Delta\tau^0$, Δu^0)



$$\Delta n^2_{(p)} = n_{(p)}\cdot\sin\Delta r_{(p)} \fallingdotseq n_{(p)}\cdot\frac{\Delta\ell^2_{(p)}}{\ell_{(p)}}$$

図 2 軸方向力と部材回転の連成 $\Delta n^2_{(p)}$（釣合式と構成式）

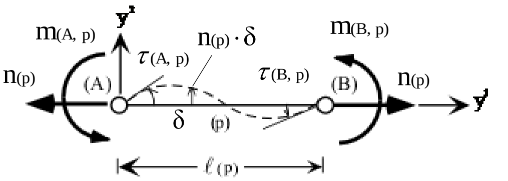


図 3 軸方向力と曲げ変形の連成 $n_{(p)}\cdot\delta$（構成式）

Formulation of Elasto-Plastic Collapse Analysis considering Strain-Hardening of steel plane frames using the Stress method

Akira KAWASHIMA

(p)：部材名の総称

$\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)}$：部材の独立な材端応力ベクトル

（成分：図３の $m_{(A,p)}$, $m_{(B,p)}$, $n_{(p)}$）

$\boldsymbol{\tau}_{(N,p)}$：部材の材端変形ベクトル

（成分：図３の $\tau_{(A,p)}$, $\tau_{(B,p)}$, $\Delta\ell_{(p)}$）

$\boldsymbol{\sigma}$：骨組全体の材端応力ベクトル（成分：$\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)}$）

$\boldsymbol{\tau}$：骨組全体の変形ベクトル（成分：$\boldsymbol{\tau}_{(N,p)}$）

$y^0_{(N,p)}$：塑性化断面の中立軸（図 1）

$\Delta\tau^0_{(N,p)}$：塑性化断面の増分相対回転角（図１）

$\Delta u^0_{(N,p)}$：塑性化断面重心点の増分伸縮変位

$\boldsymbol{\theta}$：骨組全体の変位ベクトル（成分：図４の $\theta_{(N)}$, $\mathbf{u}_{(A)}$, $\mathbf{u}_{(B)}$）

$\mathbf{m}$：荷重ベクトル

s：材端応力の総数

d：変位の自由度

$\mathbf{D}$：(d, s)型釣合行列

$\mathbf{H}_{(p)}$：部材の弾塑性柔性行列

$\mathbf{H}$：(s, s)型弾塑性柔性行列（成分：$\mathbf{H}_{(p)}$）

$\mathbf{H}^0_G$：弾塑性適合行列

f：降伏条件式

(α_m, α_n)：降伏曲面中心点の総移動量（図５）

c：ひずみ硬化係数

本論の範囲における主な仮定事項は、次の通りである。

1）一様断面を持つ直線材で構成された鋼構造平面骨組を解析対象として、骨組全体が不安定となる瞬間まで定式化する。

2）各増分間における区分的線形性を仮定して、Δ( )に関する２次以上の高次項を省略する。

3）荷重は比例載荷とし、節点荷重だけを考える。なお、部材の途中荷重を考慮した応力法は既に定式化している[7]。

2.2 基本事項

2.2.1 骨組全体の増分型釣合式

骨組全体に拡張した釣合式は、次式で表す[8]。

$$\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\mathbf{m} \qquad (1)$$

ここに、$\Delta\boldsymbol{\sigma}$ の部材成分は

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)} = \{\Delta m_{(A,p)}, \Delta m_{(B,p)}, \Delta n^2_{(p)}, \Delta n_{(p)}\}^T \qquad (2)$$

である（図２と図３を参照）。

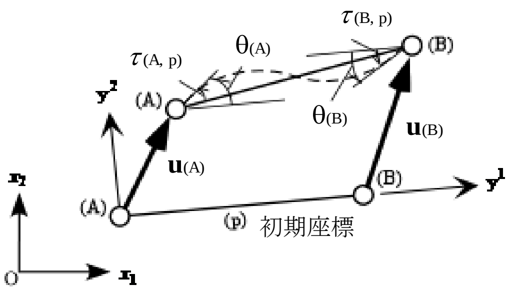


図４ 部材の幾何学的諸量

2.2.2 幾何学的関係式

(1)式に対応する幾何学的関係式は次式で表せる。

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}^T\Delta\boldsymbol{\theta} \qquad (3)$$

ここに、$\Delta\boldsymbol{\tau}$ の部材成分 $\Delta\boldsymbol{\tau}_{(N,p)}$ は、

$$\Delta\boldsymbol{\tau}_{(N,p)} = \{\Delta\tau_{(A,p)}, \Delta\tau_{(B,p)}, \Delta\ell^2_{(p)}, \Delta\ell_{(p)}\}^T \qquad (4)$$

である。$\Delta\boldsymbol{\theta}$ の成分は各節点の節点角 $\Delta\theta_{(N)}$ と変位ベクトル $\Delta\mathbf{u}_{(N)}$ である。

2.2.3 構成式

$\Delta\boldsymbol{\tau}$ と $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ の関係は次式で表せる。

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\sigma} \qquad (5)$$

ここに、弾塑性柔性行列 $\mathbf{H}$ の弾性成分 $\mathbf{H}_{(p)}$ はヤング係数を E、断面積を $A_{(p)}$、断面二次モーメントを $I_{(p)}$ とすると、軸方向力 $n_{(p)}$ を考慮した弾性曲線式より(6)式で表せる[3]。

$$\mathbf{H}^e_{(p)} = \begin{bmatrix} 2h_{(p)} - \frac{1}{45}s^3_{(p)} & -h_{(p)} - \frac{7}{360}s^3_{(p)} & 0 & 0 \\ -h_{(p)} - \frac{7}{360}s^3_{(p)} & 2h_{(p)} - \frac{1}{45}s^3_{(p)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2_{(p)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{(p)} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$h_{(p)} = \frac{\ell_{(p)}}{6EI_{(p)}}, \quad s^3_{(p)} = n_{(p)}\frac{\ell_{(p)}^3}{(EI_{(p)})^2} \qquad (7\text{-a, b})$$

$$s^2_{(p)} = \frac{\ell_{(p)}}{n_{(p)}}, \quad s_{(p)} = \frac{\ell_{(p)}}{EA_{(p)}} \qquad (7\text{-c, d})$$

2.2.4 釣合式の一般解と変形の適合条件式

釣合式(1)の一般解 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ は特解を $\Delta\boldsymbol{\sigma}^P$、余解（荷重 $\Delta\mathbf{m} = \mathbf{0}$ の解：自己釣合応力）を $\Delta\boldsymbol{\sigma}^C$ とおくと、

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\boldsymbol{\sigma}^P + \Delta\boldsymbol{\sigma}^C \qquad (8)$$

ここに、釣合行列 $\mathbf{D}$ のムーア・ペンローズ一般逆行列を $\mathbf{D}^+$ とおくと、

特解： $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{P}} = \mathbf{D}^{+}\Delta\mathbf{m}$ （9）

$\mathbf{D}^{+} = \mathbf{D}^{\mathbf{T}}(\mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathbf{T}})^{-1}$ （）内は(d,d)型行列 （10）

余解： $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{C}} = (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}}^{+}\overline{\mathbf{D}})\Delta\boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{G}\Delta\boldsymbol{\gamma}$ （11）

ここに、(s, s)型対称行列 $(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{+}\mathbf{D})$ の中から不静定次数に対応する q 個の線形独立な列ベクトルをグラムシュミットの直交化法（計算効率が良い）より求める。この(s, q)型行列は $\mathbf{G}$ とおくと、仮想仕事式は構成式(5)を用い、(12)式で表せる。

$$\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\Delta\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{H}(\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{P}} + \mathbf{G}\Delta\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0} \quad (12)$$

上式より、(11)式の $\Delta\boldsymbol{\gamma}$ は

$$\Delta\boldsymbol{\gamma} = -(\mathbf{H}_{\mathrm{G}}^{0})^{-1}\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{P}} \quad (13)$$

ここに、$\mathbf{H}_{\mathrm{G}}^{0}$ は(q, q)型の適合行列である。

$$\mathbf{H}_{\mathrm{G}}^{0} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{G} \quad (14)$$

(13)式を(11)式に代入すると、(8)式一般解 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ は次式となる。

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = (\ \mathbf{I}_{\mathrm{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{H}_{\mathrm{G}}^{0})^{-1}\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{e}})\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{P}} \quad (15)$$

$\mathbf{I}_{\mathrm{q}}$ ：(q, q)型単位行列

ここに、行列式 $\left|\mathbf{H}_{\mathrm{G}}^{0}\right|$ のとき、$\Delta\boldsymbol{\sigma}$ は一意に定めることができないので骨組全体は不安定となる。

2.2.5 節点変位ベクトル

適合条件式から $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ が求まると、節点変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{\theta}$ （(3)式）は、次式で与えられる。

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{D}^{+})^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{D}^{+})^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\sigma} \quad (16)$$

2.3 増分型の塑性条件式

移動硬化則による（初期降伏した後の）部材断面の降伏条件は(17)式で与えられる。

$$f(\mathrm{m} - \alpha_{\mathrm{m}}, \mathrm{n} - \alpha_{\mathrm{n}}) = 1 \quad (17)$$

ここに、$(\alpha_{\mathrm{m}}, \alpha_{\mathrm{n}})$ は降伏曲面中心点の総移動量（図５）である。(17)式を全微分すると、第１節の仮定事項２）より、次式が得られる。

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{m}}(\Delta\mathrm{m} - \Delta\alpha_{\mathrm{m}}) + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{n}}(\Delta\mathrm{n} - \Delta\alpha_{\mathrm{m}}) = 0 \quad (18)$$

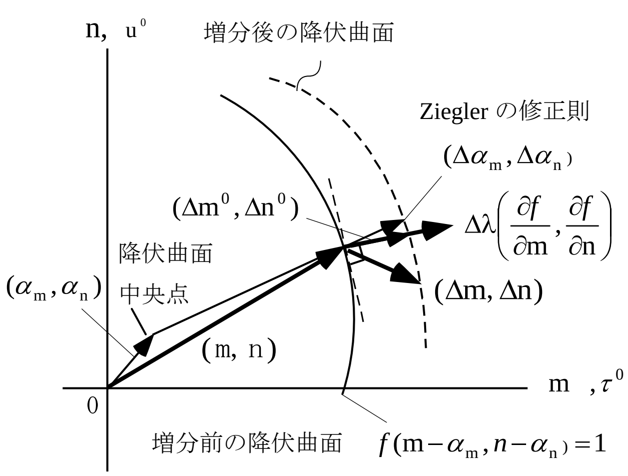
ここに、右辺の増分移動量 $(\Delta\alpha_{\mathrm{m}}, \Delta\alpha_{\mathrm{n}})$ は、Ziegler の修正則では正の実数 $\Delta\mu$ を用い

$$\Delta\alpha_{\mathrm{m}} = \Delta\mu(\mathrm{m} - \alpha_{\mathrm{m}}),\ \ \Delta\alpha_{\mathrm{n}} = \Delta\mu(\mathrm{n} - \alpha_{\mathrm{n}}) \quad (19)$$

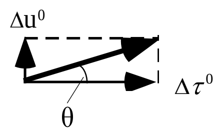
相対塑性変位成分 $\Delta\tau^{0}$ と $\Delta\mathrm{u}^{0}$ は塑性流れ則より、

$$\Delta\tau^{0} = \Delta\lambda\frac{\partial f}{\partial \mathrm{m}} \quad , \quad \Delta\mathrm{u}^{0} = \Delta\lambda\frac{\partial f}{\partial \mathrm{n}} \quad (20)$$

ここに、相対塑性変位成分の大きさを表す正の実数 $\Delta\lambda$ を消去すると、



（ａ）降伏曲面と各パラメータ



$\mathrm{y}^{0} = \tan\theta$ （図１）

$$\Delta\tau^{0} = \Delta\lambda\frac{\partial f}{\partial \mathrm{m}}$$

$$\Delta\mathrm{u}^{0} = \Delta\lambda\frac{\partial f}{\partial \mathrm{n}}$$

（ｂ）降伏曲面の相対塑性変位成分

添字 (N, p)(N = A, B) および(p)は省略

図５ 移動硬化型塑性ヒンジ法の各成分

$$\mathrm{y}^{0} = \frac{\Delta\mathrm{u}^{0}}{\Delta\tau^{0}} = \frac{\partial f/\partial\mathrm{n}}{\partial f/\partial\mathrm{m}} \quad （図１） \quad (21)$$

上式を用いると、増分型の塑性条件式(18)は

$$(\Delta\mathrm{m} - \Delta\alpha_{\mathrm{m}}) + \mathrm{y}^{0}(\Delta\mathrm{n} - \Delta\alpha_{\mathrm{n}}) = 0 \quad (22)$$

(22)式と(19)式より、$\Delta\mu$ は次式で与えられる。

$$\Delta\mu = \frac{(\Delta\mathrm{m} + \mathrm{y}^{0}\Delta\mathrm{n})}{(\mathrm{m} - \alpha_{\mathrm{m}}) + \mathrm{y}^{0}(\mathrm{n} - \alpha_{\mathrm{n}})} > 0 \quad (23)$$

次に、ひずみ硬化による断面力の上昇 $(\Delta\mathrm{m}^{0}, \Delta\mathrm{n}^{0})$ は降伏曲面の法線方向に生じるもの（図５（ａ））とすると(18)式と同様に、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{m}}(\Delta\mathrm{m} - \Delta\mathrm{m}^{0}) + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{n}}(\Delta\mathrm{n} - \Delta\mathrm{n}^{0}) = 0 \quad (24)$$

上式の（ ）内は弾性変形の変化量による増分曲げモーメントと軸方向力を表している。

(24)式は中立軸 y^{0} を用いると次式で与えられる。

$$(\Delta\mathrm{m} - \Delta\mathrm{m}^{0}) + \mathrm{y}^{0}(\Delta\mathrm{n} - \Delta\mathrm{n}^{0}) = 0 \quad (25)$$

部材(p)の材端(A)(B)が塑性化しているとき、(25)式は $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(\mathrm{N,\,p})}$ （(2)式の４成分）で表すと、

$$\mathbf{Y^0}_{(N,p)}\left(\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)} - \Delta\boldsymbol{\sigma}^0{}_{(N,p)}\right) = \mathbf{0} \tag{26}$$

上式において、

$$\mathbf{Y^0}_{(N,p)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y^0{}_{(A,p)} \\ 0 & 1 & 0 & y^0{}_{(B,p)} \end{bmatrix} \tag{27}$$

である。$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)}$ に対応する相対塑性変位ベクトルは $\Delta\boldsymbol{\tau}^0{}_{(N,p)}$ とおく。$\Delta\boldsymbol{\tau}^0{}_{(N,p)}$ は(20)式と(21)式の関係より(28)式で表せる。

$$\Delta\boldsymbol{\tau}^0{}_{(N,p)} = \mathbf{Y^0}_{(N,p)}{}^T \Delta\boldsymbol{\varphi}^0{}_{(N,p)} \tag{28}$$

ここに、 $\Delta\boldsymbol{\varphi}^0{}_{(N,p)}$ ((29)式)は材端(A)(B)の増分相対回転角をまとめたベクトルである。

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}^0{}_{(N,p)} = \left\{\Delta\boldsymbol{\tau}^0{}_{(A,p)}, \Delta\boldsymbol{\tau}^0{}_{(B,p)}\right\}^T \tag{29}$$

また、図5(a)に示す断面力の上昇$(\Delta m^0, \Delta n^0)$に対応する $\Delta\boldsymbol{\sigma}^0{}_{(N,p)}$ は、ひずみ硬化係数 c と弾性柔性行列 $\mathbf{H^e}_{(p)}$ ((6)式)および(28)式を用いると、(30)式で与えられる。

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\sigma}^0{}_{(N,p)} &= c(\mathbf{H^e}_{(p)})^{-1}\Delta\boldsymbol{\tau}^0{}_{(N,p)} \\ &= c(\mathbf{H^e}_{(p)})^{-1}\mathbf{Y^0}_{(N,p)}{}^T\Delta\boldsymbol{\varphi}^0{}_{(N,p)}\end{aligned} \tag{30}$$

上式を(26)式に代入すると、$\Delta\boldsymbol{\varphi}^0{}_{(N,p)}$ は、次式で与えられる。

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}^0{}_{(N,p)} = (\mathbf{Z^0}_{(N,p)})^{-1}\mathbf{Y^0}_{(N,p)}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)} \tag{31}$$

ここに、 $\mathbf{Z^0}_{(N,p)}$ （２行２列の行列） は

$$\mathbf{Z^0}_{(N,p)} = c\mathbf{Y^0}_{(N,p)}(\mathbf{H^e}_{(p)})^{-1}\mathbf{Y^0}_{(N,p)}{}^T \tag{32}$$

である。なお、(20)式の $\Delta\lambda$ は $\Delta\boldsymbol{\varphi}^0{}_{(N,p)}$ （成分：(29)式） より求めることがでる。

2.4　弾塑性構成方程式

弾塑性変形ベクトル $\Delta\boldsymbol{\tau}_{(N,p)}$ は、弾性成分と塑性成分の和として与えられる。

$$\Delta\boldsymbol{\tau}_{(N,p)} = \Delta\boldsymbol{\tau}^e{}_{(N,p)} + \Delta\boldsymbol{\tau}^0{}_{(N,p)} \tag{33}$$

上式右辺第１項は、

$$\Delta\boldsymbol{\tau}^e{}_{(N,p)} = \mathbf{H^e}_{(p)}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)} \tag{34}$$

第２項は （31） 式を(28)式に代入すると、

$$\Delta\boldsymbol{\tau}^0{}_{(N,p)} = \mathbf{Y^0}_{(N,p)}{}^T(\mathbf{Z^0})^{-1}\mathbf{Y^0}_{(N,p)}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)} \tag{35}$$

となる (34)式と(35)式を(33)式に代入すると、部材(p)の構成式は次式で表せる。

$$\Delta\boldsymbol{\tau}_{(N,p)} = \mathbf{H}_{(p)}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)} \tag{36}$$

ここに、弾塑性柔性行列 $\mathbf{H}_{(p)}$ は次のようになる。

$$\mathbf{H}_{(p)} = \mathbf{H^e}_{(p)} + \mathbf{Y^0}_{(N,p)}{}^T(\mathbf{Z^0}_{(N,p)})^{-1}\mathbf{Y^0}_{(N,p)} \tag{37}$$

3. あとがき

以上、本定式化手法についてまとめる。

１）(35)式から分かるように、塑性化断面の相対変位に関する不連続性（図１の($\Delta\varphi^0, \Delta u^0$)）は応力法の未知量である独立な断面力を成分とする $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)}$ により定式化できる。

２）(37) 式を構成式((5)式)に組み込むことにより、弾性解析を準用する移動硬化型塑性ヒンジ法による弾塑性崩壊解析が可能となる。

参考文献

1)　近藤一夫：鋼構造骨組の塑性崩壊解析，コンピュータによる極限解析法シリーズ6,培風館､(1991)，pp. 1-75

2)　川島　晃，花井重孝：一般逆行列に基づく応力法による立体トラスの有限変位応力解析，日本建築学会構造工学論文集,Vol.54B,(2008)，pp241-250

3)　川島晃，花井重孝：一般逆行列に基づく応力法による平面骨組の幾何学的非線形性解析，日本建築関東支部審査付き研究報告，(2010)，pp.49-5

4)　A.Kwashima, Y.takeuchi, and S.Hanai : Shape Analysis of Self-Equilibrating Cable Networks with Initial Tension Adjusted by Stress Method, Journal of Structural Engineering, Vol.57B, (2011), pp.47-54

5)　田中尚，半谷裕彦:不安定トラスの剛体変位と安定化条件，日本建築学会論文報告集，NO.356，（1985），pp.35-42

6)　半谷裕彦，川口健一:形態解析・一般行列の応用，培風館，(1991)

7)　花井重孝，川島晃，石丸麟太郎，田中尚：立体ラーメンの微小変位応力解析（その２ 応力法），日本建築学会構造系論文集，第 570 号，(2003),pp.61-68

8)　常川重樹，川島晃，高田収：一般逆行列に基づく応力法による平面骨組の自由振動解析（変位モーによる定式化),構造工学論文集 Vol.59B,(2013)，pp.157-165

9)　秋山侑槻、川島晃、常川重樹：応力法による鋼構造平面骨組の弾塑性解析に関する研究―その１．塑性ヒンジ法―、日本大学生産工学部第 47 回学術講演会，(2014)，pp.135-138

10)　秋山侑槻、川島晃、常川重樹：応力法による鋼構平面骨組の弾塑性解析に関する研究―その２．増分型の最適近似解と数値検証，日本大学生産工学部第 48 回学術講演会，(2015)，pp.57-60