

線形化作用素を重みノルムとした半線形楕円型偏微分方程式の 精度保証付き数値計算法

早大理工学 ○関根 晃太 早大理工学 大石 進一
日大生産工 山崎 憲 日大生産工 内田 暁

1 まえがき

本報告では、半線形楕円型偏微分方程式の定常状態を表す次のような2階楕円型偏微分方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

の解に対する精度保証付き数値計算を考える。ここで、 Ω は $\mathbb{R}^2$ の有界多角形領域とする。また、作用素 $f: H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ はFréchet微分可能な自己共役作用素であるとする。

(1)の解に対する精度保証付き数値計算法は中尾ら[1]やPlum[2]によって開発されている。また、[3]でシグマノルムを利用した手法を考案し、重み付きノルムの効果を示した。本研究はさらに問題に特化した重みノルムの選択として、線形化作用素を重みノルムに利用した精度保証付き数値計算法を提案する。その結果、安定解に対しては線形化作用素の逆作用素のノルム評価が必要ないことを証明する。

2 準備

X と Y をBanach空間とする。次のような

$$F(u) = 0$$

を満たす解 $u \in X$ を求める問題を考える。但し非線形作用素 $F: X \rightarrow Y$ とする。そのとき次のNewton-Kantorovichの定理が知られている。

Theorem 1 (Newton-Kantorovich)

Assuming that the Fréchet derivative $F'[\hat{u}]$ is nonsingular and satisfies

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}F(\hat{u})\|_X \leq \alpha$$

for a certain positive α . Let $\bar{B}(\hat{u}, 2\alpha) := \{v \in X: \|v - \hat{u}\|_X \leq 2\alpha\}$ be a closed ball and $D \supset \bar{B}(\hat{u}, 2\alpha)$ be an open ball. We assume that the following holds for a certain positive ω ,

$\|F'[\hat{u}]^{-1}(F'[w] - F'[\hat{u}])\|_{X,X} \leq \omega\|w - \hat{u}\|_X$,
where $\forall w, m \in D$. If $\alpha\omega \leq 1/2$ holds, then there exists a solution $u \in X$ of $F(u) = 0$ satisfying

$$\|u - \hat{u}\|_X \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha\omega}}{\omega}.$$

Furthermore, the solution u is unique in D .

この定理を利用するために次の系を示す。

Corollary 1

To apply Theorem 1, we will calculate three constants $C_1, C_{2,h}$ and C_3 . These satisfy the following inequalities

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{Y,X} \leq C_1$$

$$\|F(\hat{u})\|_Y \leq C_{2,h}$$

$$\|F'[w] - F'[\hat{u}]\|_{X,Y} \leq C_3\|w - \hat{u}\|_X$$

If $C_1^2 C_{2,h} C_3 < 1/2$ holds, then there is a solution $u \in X$ of $F(u) = 0$ satisfying

$$\|u - \hat{u}\|_X \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2C_1^2 C_{2,h} C_3}}{C_1 C_3}.$$

Furthermore, the solution u is unique in $\bar{B}(\hat{u}, 2C_1 C_{2,h}) := \{v \in X: \|v - \hat{u}\|_X \leq 2C_1 C_{2,h}\} \subset D$.

ここで、定数 $C_1, C_{2,h}, C_3$ を求めれば良い。

3 X と Y の選定

$L^p(\Omega), p \in [1, \infty)$ はLebesgue p 乗可積分可能な関数空間とする。 $p = 2$ について、内積 $(u, v)_{L^2} := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ とし、内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_{L^2} := \sqrt{(\cdot, \cdot)_{L^2}}$ とする。正のある実数 s について $H^s(\Omega)$ は s 階の L^2 -Sobolev空間とする。関数空間 $H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega): u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ とする。この関数空間 $H_0^1(\Omega)$ を X とする。そのとき関数空間 $H_0^1(\Omega)$ にどのようなノルムを導入するかが本報告の重要な点である。本報告では次のような内積を関数空間 $H_0^1(\Omega)$ に導入する：

Numerical verification method for solutions to PDE's using weighted norm
Kouta SEKINE, Shin'ichi OISHI, Ken YAMAZAKI, and Akira UCHIDA

$(\cdot, \cdot)_{H_0^1} := (\nabla \cdot, \nabla \cdot) + \sigma(\cdot, \cdot)_{L^2} + (f'[\hat{u}] \cdot, \cdot)_{L^2}$.
とする. 但し, σ は $\Delta + \sigma + f'[\hat{u}]$ が正値自己共役作用素になるように設定する. また, 関数空間 $H_0^1(\Omega)$ のノルムは $\|\cdot\|_{H_0^1} := \sqrt{(\cdot, \cdot)_{H_0^1}}$ とする.

$H^{-1}(\Omega)$ を $H_0^1(\Omega)$ の共役空間とする.
 $T \in H^{-1}(\Omega)$ と $u \in H_0^1(\Omega)$ について, $\langle T, u \rangle$ によって共役対を表す. また, $T \in H^{-1}(\Omega)$ のノルムを

$$\|T\|_{H^{-1}} := \sup \frac{|\langle T, u \rangle|}{\|u\|_{H_0^1}}.$$

とする. このような関数空間 $H^{-1}(\Omega)$ を Y として, Newton-Kantorovichの定理を考える.

4 主定理

$u \in H_0^1(\Omega)$ について線形作用素 $A: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ と非線形作用素 $N: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$

$$\langle Au, w \rangle := (\nabla u, \nabla w)_{L^2}$$

$$\langle N(u), w \rangle := (f(u), w)_{L^2}.$$

とする. また, 非線形作用素 $F: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ を

$$F(u) := Au - N(u)$$

とすると, 方程式(1)の u について $F(u) = 0$ を満たす解を探せばよい. また, 非線形作用素 $F(u)$ の $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ におけるFréchet微分を

$$F'[\hat{u}] := A - N'[\hat{u}]$$

とする.

Theorem 2

If $\sigma = 0$, then $C_1 = 1$.

Proof

もし $\sigma = 0$ ならば $F'[\hat{u}]$ は $H_0^1(\Omega)$ と $H^{-1}(\Omega)$ で等長同型写像となり,

$$\|u\|_{H_0^1} = \|F'[\hat{u}]u\|_{H^{-1}}, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

が成り立つ. その上で, $F'[\hat{u}]$ は逆作用素を持ち,

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}u\|_{H_0^1} = \|u\|_{H^{-1}}, \forall u \in H^{-1}(\Omega)$$

も成り立つ. C_1 の定義より

$$\begin{aligned} \|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{H^{-1}, H_0^1} &= \sup \frac{\|F'[\hat{u}]^{-1}u\|_{H_0^1}}{\|u\|_{H^{-1}}} \\ &= \sup \frac{\|u\|_{H^{-1}}}{\|u\|_{H^{-1}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる.

□

5 σ の決定方法

σ は定義より作用素 $\Delta + \sigma + f'[\hat{u}]$ の最小固有値が正であればよい. よって次の固有値問題を考える:

$$\text{Find } u \in X, \lambda \in \mathbf{R} \text{ s.t. } (u, v)_{H_0^1} = \lambda(u, v)_{L^2}$$

この様な無限次元固有値問題の評価方法として次に示すような[4]の劉-大石の定理が知られている:

Theorem 3 (劉-大石)

Let $\{\lambda_i\}$ be an eigenvalue satisfying an eigenvalue problem

$$\text{Find } u \in X, \lambda \in \mathbf{R} \text{ s.t. } (u, v)_{H_0^1} = \lambda(u, v)_{L^2}.$$

Let $\{\lambda_i^h\}$ be an eigenvalue satisfying the finite dimensional eigenvalue problem: Find $u_h \in X_h, \lambda^h \in \mathbf{R}$ such that

$$(u_h, v_h)_{H_0^1} = \lambda^h(u_h, v_h)_{L^2}.$$

Let C_h be a real constant satisfying

$$\|u - P_h u\|_{L^2} \leq C_h \|u - P_h u\|_{H_0^1}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Then, we have the verified lower bound of each λ_i :

$$\frac{\lambda_i^h}{1 + C_h^2 \lambda_i^h} \leq \lambda_i.$$

劉-大石の定理を用いることで, $\Delta + \sigma + f'[\hat{u}]$ の正値性及び, 最小となる σ が決定できる. これから, $\sigma = 0$ ならばTheorem 2から半線形楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法を行う際の困難の一つである定数 C_1 をアプリアリで, 且つ最適値を評価できる.

「参考文献」

- [1] M.T. Nakao: A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems, Japan J. Indust. Appl. Math. 5, pp.313–332 (1988).
- [2] M. Plum: Computer-assisted existence proofs for two-point boundary value problems, Computing. 46, pp.19–34 (1991).
- [3] 関根晃太, 田中一成, 大石進一, 山崎憲, ”シグマノルムを利用した精度保証付き数値計算法の連立楕円型偏微分方程式への応用”, 第47回日本大学生産工学部学術講演会概論, (2014).
- [4] X. Liu and S. Oishi: Verified eigenvalue evaluation for the Laplacian over polygonal domain of arbitrary shape, SIAM J. Numer. Anal, 51, pp.1634–1654 (2013).