

応力法による鋼構造平面骨組の弾塑性解析に関する研究

- その2. 増分型の最適近似解析と数値検証 -

日大生産工(院) ○秋山 侑槻 日大生産工 川島 晃
(株) 中田捷夫研究室 常川 重樹

1. 研究の背景

鋼構造分野における非線形問題の解析手法を概観する。変位法は塑性ひずみの発生によって、部材の剛性分布が大きく変化する材料学的非線形性が強い範囲に対しては、その剛性分布と無関係に変位関数を仮定するため本質的に不向きである。一方、応力法は平衡方程式(釣合式)を満足する独立な合応力(断面力)を仮定するので、幾何学的な非線形性が強い問題の解析が困難とされてきた(これらは文献1)にまとめられている)。この幾何学的非線形問題に対して、本応力法研究²⁾では断面力と部材変形の連成効果を未知量とする基本関係式(曲率の近似式を用いる)の定式化より、棒の弾性安定問題(微分方程式による解析解)の近似解が得られることを示した。また、これまでの応力法のように、不静定骨組の静定基本系を求める必要がないので、骨組構造全体の冗長性を表す基本量である不静定余力(自己釣合系の断面力)が求まることを示した³⁾。一方、幾何学および材料学的非線形問題の有効な解析手法として、「変位の連続条件と平衡条件について、これを変分学的に満足させるハイブリッド型応力法(有限要素法)を拡張した変位法が提案されている」¹⁾。この非線形問題では応答結果の信頼性および構造設計に用いる評価軸を含めて、常用されている変位法を補う解析手法が必要になると考えている。

2. 本研究の目的と位置づけ

本研究は弾塑性力学理論の延長線上で理解しやすい応力法の構築を目的として、まず、構造

設計で規定された保有耐力を求める実用的な解法である塑性ヒンジ法による弾塑性解析(以後、増分解析手法と呼ぶ)を展開する。

本報告では前報⁴⁾に引き続き、増分解析手法による応答値(一例を図1の実線1、2に示す)を評価する基軸として、軸方向力の影響を考慮した極限解析⁵⁾における(安全率の)下界値が得られる解析手法(増分型の最適近似解析:定式化は第3章で述べる)に拡張し、その数値検証結果を述べる。

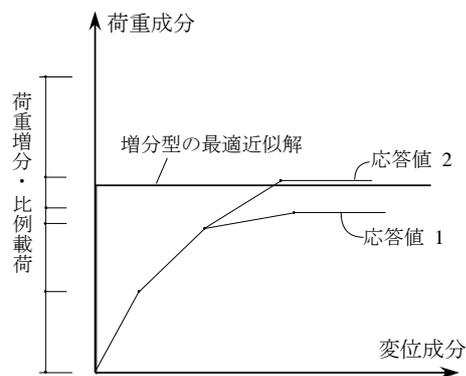


図1 増分型の最適近似解と増分解析手法による応答の概念図

3. 増分型の塑性条件と最適近似解析について

材料学的非線形問題はその応答値が履歴に依存するので、最終的な応答値はその全過程を幾つかの区間に区切って、順次応答値を求める。これを区分的線形化理論による増分法と呼んでいる。なお、増分記号は Δ を用いる。

3.1 増分型の塑性条件

断面全体の降伏条件(記号: f)は断面力(曲げモーメント m 、軸方向力 n)の関数として、

$$f(m, n) = 1 \quad (1)$$

Study on Elastic-Plastic Analysis of Steel Plane Frames by the Stress Method

- Part 2. Formulation of Best Approximate Incremental Analysis for Plastic-Hinge Method,

and the Numerical Verification Examples -

Yuki AKIYAMA, Akira KAWASHIMA and Shigeki TSUNEKAWA

とする。断面力 m 、 n が (1) 式を満足するとき、全断面が塑性化したこと（塑性ヒンジ）を表す。増分後の降伏条件は次式となる。

$$f(m + \Delta m, n + \Delta n) = 1 \quad (2)$$

上式を $\Delta m, \Delta n$ について Taylor 展開して、区分的線形化の仮定より $\Delta m, \Delta n$ に関する 2 次以上の項を省略して、式 (1) より差し引くと増分型の塑性条件は次式となる。

$$\frac{\partial f}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial f}{\partial n} \Delta n = 0 \quad (\text{図 2 参照}) \quad (3)$$

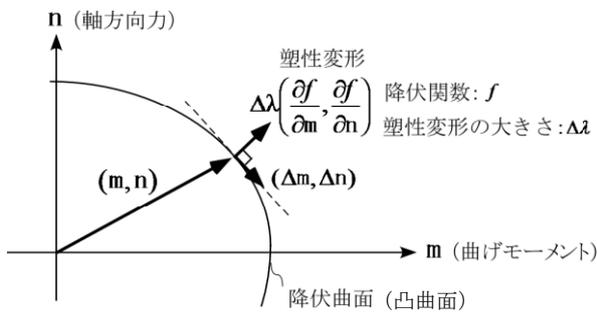


図2 塑性ヒンジ法

3.2 断面の中立軸による増分型の塑性条件

(3) 式は力学的特性評価に繋げる。塑性ヒンジ点における塑性変形の増分は曲げモーメント m と軸方向力 n に対応する成分を、それぞれ $\Delta\phi_0$ (増分相対変角：増分相対たわみ角) と $\Delta\varepsilon_0$ (伸縮の増分) と表すと塑性流れ則より、次式で表せる (図2、図3を参照)。

$$\Delta\phi_0 = \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial m}, \quad \Delta\varepsilon_0 = \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial n} \quad (4-1, 2)$$

ここに、 $\Delta\lambda$ は塑性変形の大きさを表すスカラーである (求め方は前報⁴⁾ に示している)。断面の中立軸は次式で表せる⁵⁾ (図3と図4を参照)。

$$\text{断面の中立軸} : y_0 = \frac{\Delta\varepsilon_0}{\Delta\phi_0} = \frac{\partial f / \partial n}{\partial f / \partial m} \quad (5)$$

(3) 式は (5) 式を用いると、次式で表せる。

$$\Delta m + y_0 \Delta n = 0 \quad (\text{図 4 を参照}) \quad (6)$$

上式は中立軸におけるモーメントの釣合式を表すことは明らかである。

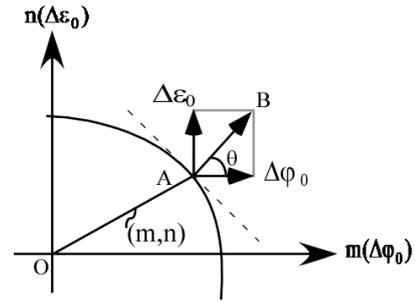


図3 塑性変形成分

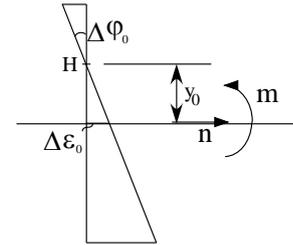


図4 断面の塑性変形と中立軸

3.3 増分型の釣合式の概要⁴⁾

骨組を構成する部材要素の全てが非塑性化状態としたときの釣合式は次式で表す。

$$\mathbf{D}\Delta\sigma = \Delta\mathbf{m} \quad (7)$$

ここに、 \mathbf{D} は釣合行列である。 $\Delta\sigma$ (未知量) は断面力 (材端の曲げモーメントと軸方向力) を部材番号順に並べたベクトルである。 $\Delta\mathbf{m}$ は荷重ベクトルである。つぎに、増分型の塑性条件：(6) 式を (7) 式の末尾に組み込む、その手順は前報⁴⁾ に示している。

$$\text{増分型の釣合式} : \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \dots \\ \mathbf{D}^0 \end{pmatrix} \Delta\sigma = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{m} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (8)$$

ここに、 \mathbf{D}^0 は塑性化した部材端における (6) 式の $\Delta\mathbf{m}$ の係数 1 と断面の中立軸 y_0 で構成される行列である。

3.4 一般逆行列による釣合式の最適近似解

不静定構造の釣合式 (荷重成分と断面力成分の関係式) は横長行列で表現される (通常の逆行列計算は使えない)。このような行列で表現される多元連立一次方程式の解法は、一般逆行列⁶⁾ が用いられる (例えば、文献7))。ここに、釣合式の一般解 (独立な断面力：材端曲げモーメントと

軸方向力) は微分方程式の解と同様に、特解と余解に分離される。特解は一般逆行列の定義と性質により、最小自乗近似と結びつく、これを最適近似解と定義している (付録を参照)。特解 (非同次方程式の解) は増分型の釣合式のみを満足するので、骨組構造を完全剛塑性体としたときの断面力を表す。余解 (同次方程式) は不静定余力系 (自己釣合系の断面力) を表す。

3.5 増分型の幾何学的関係式の概要⁴⁾

各部材要素端の増分相対たわみ角 2 成分と伸縮を部材番号順に並べたベクトルを $\Delta\tau$ とし、各節点の節点角と変位 2 成分を節点番号順に並べたベクトルおよび増分型の塑性条件: (6) 式 (従属式) の Δm に対応する増分相対変角 $\Delta\bar{\varphi}_0$ ($\Delta\lambda = 1$) によるベクトルをまとめて $\Delta\bar{\theta}$ とする。この $\Delta\tau$ と $\Delta\bar{\theta}$ の関係式は次式で表せる。

$$\Delta\tau = \bar{\mathbf{D}}^T \Delta\bar{\theta} \quad (9)$$

式(9)の一般解は、 $\bar{\mathbf{D}}$ のムーア・ペンローズ一般逆行列を $\bar{\mathbf{D}}^+$ (付録を参照) とする、

$$\text{特解: } \Delta\bar{\theta}^P = (\bar{\mathbf{D}}^T)^+ \Delta\tau = (\bar{\mathbf{D}}^+)^T \Delta\tau \quad (10-a)$$

$$\text{余解: } \Delta\bar{\theta}^C = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^+) \Delta\alpha \quad (11-b)$$

ここに、 \mathbf{I} は単位行列、 $\Delta\alpha$ は任意ベクトルである。余解は変形ベクトル $\Delta\tau = \mathbf{0}$ の解であるから崩壊機構形成時のリンク運動を表す。

4. 数値検証

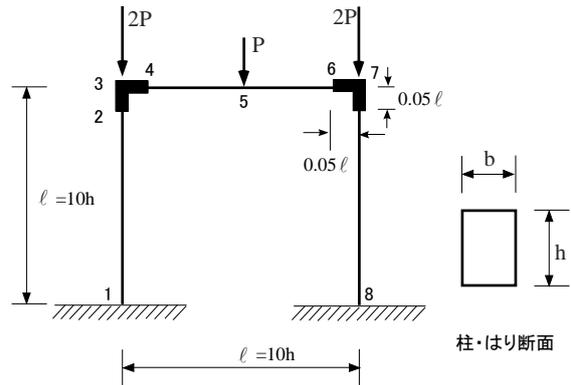
文献5) に示された例題を通して、数値検証した結果を示す。

4.1 例題1 本例題は図5に示すような柱・はり材ともに同じ断面の正方門形ラーメンである。はりせい h はスパン ℓ の $1/10$ である。また、節点3と節点7において柱幅、はり幅の中は剛としている。柱・はり部材要素の降伏条件式 f は次の通りである。

$$f(m, n) = \frac{|m|}{m^0} + \left(\frac{n}{n^0}\right)^2 = 1$$

ここに、 m^0 は全塑性曲げモーメント、 n^0 は降伏

軸力である。



$$\ell = 400\text{cm} \quad b = h = 40\text{cm}$$

$$m^0 = 384,000\text{kN} \cdot \text{cm} \quad n^0 = 38,400\text{kN}$$

$$\sigma_0 = 24.0\text{kN/cm}^2$$

図5 例題1 (数字: 節点番号)

文献5) の仮想仕事法による崩壊荷重 (上界値) は 7161.6kN であり、断面の中立軸は初期値 0 から、降伏条件を満足するように収斂計算を行った結果である。本解析は崩壊荷重 (下界値) 7158.56kN である。

4.2 例題2 本例題は図6に示すように変動軸力を受けるラーメンであり、第1層部のみを計算した。柱断面およびスパンと高さは例題1と同じである。はりは剛体である。

仮想仕事法による崩壊荷重 (上界値) は 2442.2kN であり、本解析は崩壊荷重 (下界値) 2441.9kN である。

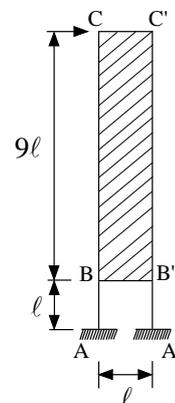


図6 例題2

5. まとめ

以上、本報告では軸方向力の影響を考慮した増分型の最適近似解析を定式化し、数値検証より極限解の下界値が得られることを示した。

付録 一般逆行列による増分型釣合式の最適近似解⁶⁾ および考察

本文の第3章3節に示したように、あらかじめ節点(k)に与える荷重増分の成分 Δm_k と増分型の塑性条件の右辺0をまとめて列ベクトル $\Delta \bar{m} = \{\Delta m, 0\}^T$ (T:ベクトルの転置)で表す。また、各部材の独立な断面力は列ベクトル $\Delta \sigma$ で表す。

増分型の釣合式をあらかじめ満足しなければならない条件(付帯条件)として、独立な断面力 $\Delta \sigma$ のノルム $\Delta \sigma^T \Delta \sigma$ の最小化問題を考える。この最小解を最適近似解と定義している。 $\Delta \sigma^T \Delta \sigma$ の最小化は次の関数Fを最小にすることと同じである。

独立な断面力 $\Delta \sigma$ のノルム： $\Delta \sigma^T \Delta \sigma$ の最小化

$$F = \frac{1}{2} \Delta \sigma^T \Delta \sigma + \Delta \lambda^T (\Delta \bar{m} - \bar{D} \Delta \sigma) \quad \text{付(1.1)}$$

目的関数F：最小化

$$\text{制約条件：} \Delta \bar{m} = \bar{D} \Delta \sigma \quad (\text{釣合式}) \quad \text{付(1.2)}$$

ここに、 \bar{D} ：(q+p,s)型釣合行列、q：荷重成分の総数(変位の自由度)、p：独立な増分型塑性条件の総数(*参照)、s：独立な断面力の総数、 $\Delta \lambda$ ：ラグランジュ未定係数ベクトルを表す。

目的関数Fを最小化したときの $\Delta \sigma$ ： $\Delta \sigma^*$ で表す。

付(1.1)式のFを $\Delta \sigma$ の各成分 $\Delta \sigma_i$ で偏微分して

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \Delta \sigma_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \Delta \sigma_2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{より、} \Delta \sigma^* = \bar{D}^T \Delta \lambda \quad \text{付(1.3,4)}$$

また、Fを $\Delta \lambda$ の各成分 $\Delta \lambda_i$ で偏微分すると、付(1.2)式となることは明らかである。付(1.4)式を付(1.2)式に代入すると

$$\Delta \bar{m} = \bar{D} \bar{D}^T \Delta \lambda \quad \text{付(1.5)}$$

上式右辺の $\bar{D} \bar{D}^T$ は付(1.2)式の下に説明したように

(q+p,q+p)型対称行列であり、 \bar{D} と $\bar{D} \bar{D}^T$ のランクは(q+p) ($s \geq (q+p)$)：s個の断面力により(q+p)個運動を拘束している)であるから、付(1.5)式右辺の未定係数ベクトル $\Delta \lambda$ は、

$$\text{行列式} \left| \bar{D} \bar{D}^T \right| \neq 0 : \Delta \lambda = (\bar{D} \bar{D}^T)^{-1} \Delta \bar{m} \quad \text{付(1.6)}$$

(q+p)=sのとき崩壊機構(行列式 $\left| \bar{D} \bar{D}^T \right| = 0$)を形成することがある(文献8)の例題を参照)。つまり、このとき、最適近似解は存在しない。

付(1.6)式を付(1.4)式に代入すると、最適近似解($\Delta \sigma^*$)は次式で与えられる。

$$\Delta \sigma^* = \bar{D}^T (\bar{D} \bar{D}^T)^{-1} \Delta \bar{m} = \bar{D}^+ \Delta \bar{m} \quad \text{付(1.7)}$$

$$\text{ここに、} \bar{D}^+ = \bar{D}^T (\bar{D} \bar{D}^T)^{-1} \quad \text{付(1.8)}$$

は釣合行列 \bar{D} のムーア・ペンローズ一般逆行列である。

*：一つの節点に2部材が集まり、かつ同時に降伏条件を満たすとき、増分型の塑性条件は従属関係となるので1を減じる(構造力学における骨組の静定・不静定の判別式：剛節点に集まる部材の材端曲げモーメントの伝達数と同じ)

参考文献

- 1) 近藤一夫：鋼構造骨組の塑性崩壊解析、コンピュータによる極限解析法シリーズ6、培風館、pp. 1-75、1991年
- 2) 川島晃、花井重孝：一般逆行列に基づく応力法による平面骨組の幾何学的非線形性解析、日本建築学会関東支部審査付き研究報告集5、pp. 49-52、2010.3
- 3) 花井重孝、川島晃、石丸麟太郎、田中尚：立体ラーメンの微小変位応力解析(その2 応力法)、日本建築学会構造系論文集、第570号、pp. 61-68、2003.8
- 4) 秋山侑槻、川島晃、常川重樹：応力法による鋼構造平面骨組の弾塑性解析に関する研究—その1. 塑性ヒンジ法—、日本大学生産工学部第47回学術講演会、pp. 135-138、2014
- 5) 田中尚：構造物の極限解析、彰国社、1966.7
- 6) 半谷裕彦、川口健一：形態解析・一般行列の応用、培風館、(一般逆行列の定義と性質) pp. 21-28、(最適近似解) pp. 46-51、1991.4
- 7) 日本建築学会：鋼構造限界状態設計、設計例、(最小自乗応力場による骨組の塑性設計) pp. 38-44、丸善、1990.2
- 8) 日本建築学会：鋼構塑性設計指針、(仮想仕事法による2層1スパンラーメンの解析) pp. 19-22、丸善、2014.9