

シグマノルムを利用した精度保証付き数値計算法の 連立楕円型偏微分方程式への応用

早大理工学 ○関根 晃太 早大基幹理工 田中 一成
早大理工学 大石 進一 日大生産工 山崎 勝

1 まえがき

本報告では、FitzHugh-Nagumo 方程式の定常状態を表す次のような連立 2 階楕円型偏微分方程式

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u = f(u) + \delta v & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = u - \gamma v & \text{in } \Omega \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}, \quad (1)$$

の解に対する精度保証付き数値計算を考える。ここで、 Ω は \mathbb{R}^2 の有界多角形領域とする。また、作用素 $f: H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ は Fréchet 微分可能であるとする。

(1)の解に対する精度保証付き数値計算法は渡部によって中尾法を用いた手法が考案されている[1]。また、[2]で Newton-Kantorovich like theorem を利用した手法を考案している。本研究は[2]の手法に[3]で提案したシグマノルムを利用した精度保証付き数値計算結果の改善手法を組み合わせる。その結果、方程式(1)の解に対する精度保証付き数値計算が成功しやすくなることを示す。

2 準備

$\forall u, w \in H_0^1(\Omega)$ について次の記号を定義する:

$$(u, w)_{L^2} := \int_{\Omega} u(x) \cdot w(x) dx,$$

$$(u, w)_{H_0^1} := (\nabla u, \nabla w)_{L^2} + \sigma(u, v)_{L^2}$$

とする。また、それぞれ内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_{L^2} = \sqrt{(\cdot, \cdot)_{L^2}}$ 及び $\|\cdot\|_{H_0^1} = \sqrt{(\cdot, \cdot)_{H_0^1}}$ とする。 $H^{-1}(\Omega)$ を $H_0^1(\Omega)$ の共役空間とする。

線形作用素 $B: H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ を $v = Bu$ 満たす解作用素とする。非線形作用素 $g: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ を $g(u) = \frac{1}{\epsilon^2}(f(u) + \delta Bu)$ とする。 $u \in H_0^1(\Omega)$ について線形作用素 $A: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ と非線形作用素 $N: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$

$$\langle Au, w \rangle := (\nabla u, \nabla w)_{L^2}$$

$$\langle N(u), w \rangle := (g(u), w)_{L^2}.$$

とする。また、非線形作用素 $F: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ を

$$F(u) := Au - N(u)$$

とすると、方程式(1)の u について $F(u) = 0$ を満たす解を探せばよい。

Theorem 1 (Newton-Kantorovich)

Assuming that the Fréchet derivative $F'[\hat{u}]$ is nonsingular and satisfies

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}F(\hat{u})\|_{H_0^1} \leq \alpha$$

for a certain positive α . Let $\bar{B}(\hat{u}, 2\alpha) := \{v \in H_0^1(\Omega): \|v - \hat{u}\|_{H_0^1} \leq 2\alpha\}$ be a closed ball and $D \subset \bar{B}(\hat{u}, 2\alpha)$ be an open ball. We assume that the following holds for a certain positive ω ,

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}(F'[w] - F'[m])\|_{H_0^1, H_0^1} \leq \omega \|w - m\|_{H_0^1}$$

where $\forall w, m \in D$. If $\alpha\omega \leq 1/2$ holds, then there exists a solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of $F(u) = 0$ satisfying

$$\|u - \hat{u}\|_{H_0^1} \leq \frac{1-\sqrt{1-2\alpha\omega}}{\omega}.$$

Furthermore, the solution u is unique in D .

この定理を利用するためには次の系を示す。

Corollary 1

To apply Theorem 1, we will calculate three constants $C_1, C_{2,h}$ and C_3 . These satisfy the following inequalities

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{H^{-1}, H_0^1} \leq C_1$$

$$\|F(\hat{u})\|_{H^{-1}} \leq C_{2,h}$$

$$\|F'[w] - F'[m]\|_{H_0^1, H^{-1}} \leq C_3 \|w - m\|_{H_0^1}$$

If $C_1^2 C_{2,h} C_3 < 1/2$ holds, then there is a solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of $F(u) = 0$ satisfying

$$\|u - \hat{u}\|_{H_0^1} \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2C_1^2 C_{2,h} C_3}}{C_1 C_3}.$$

Furthermore, the solution u is unique in $\bar{B}(\hat{u}, 2C_1 C_{2,h}) := \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v - \hat{u}\|_{H_0^1} \leq 2C_1 C_{2,h}\} \subset D$.

ここで、定数 $C_1, C_{2,h}, C_3$ を求めれば良い。

3 数値実験結果

数値実験として次の連立 2 階楕円型偏微分方程式

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u = u - u^3 + v \text{ in } \Omega, \\ -\Delta v = u + 1.2v \text{ in } \Omega \\ u = v = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}, \quad (1)$$

を考える。ここで、 ϵ をパラメータとして変化させ、それに対する精度保証付き数値実験結果をみる。但し、領域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ の正方形領域とし、 $h = 2^{-6}$ となるように直角二等辺三角形の均一メッシュで分割した。近似解 \hat{u} は 2 次基底関数を用いた有限要素法で求めた。また、 σ の決め方は、

$$\sigma \geq -\frac{1}{\epsilon^2} (\text{ess. inf}_{x \in \Omega} f'[\hat{u}] - |\delta| K_1)$$

K_1

$$:= \max\left\{\frac{1}{|\gamma + \lambda|} : \lambda \text{ はラプラスיאンの最小固有値}\right\}$$

とする。図1に $\epsilon = 0.08$ 、図2に $\epsilon = 0.06$ の場合の近似解を示す。図1に比べ図2の近似解の勾配が急になっていることが見て取れる。

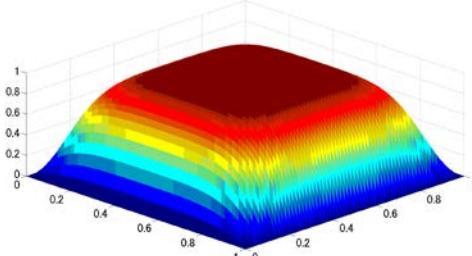


図1(a). $\epsilon = 0.08$ の場合の近似解 \hat{u}

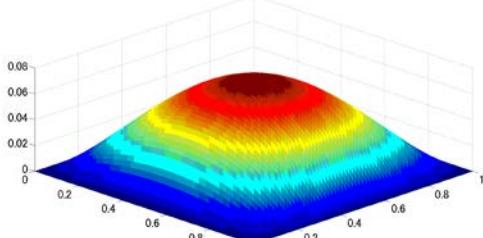


図1(b). $\epsilon = 0.08$ の場合の近似解 \hat{v}

表1に数値実験結果を示す。数値実験結果の N-KC の値が 0.5 以下であることから定理1の十分条件を満たし、精度保証が成功した。また、 σ を導入していない従来手法では精度保証が失敗した。これより、 σ を導入することで精度保証が可能となるケースが増えることがわかる。

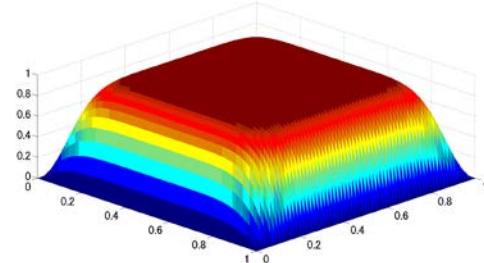


図2(a). $\epsilon = 0.06$ の場合の近似解 \hat{u}

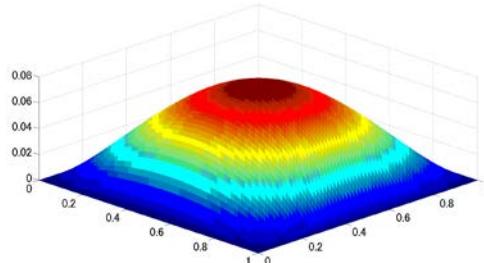


図2(b). $\epsilon = 0.06$ の場合の近似解 \hat{v}

| ϵ | σ | N-KC | $\ u - \hat{u}\ $ | $\ v - \hat{v}\ $ |
|------------|----------|------|----------------------|----------------------|
| 0.08 | 287 | 0.13 | 1.7×10^{-2} | 1.8×10^{-3} |
| 0.07 | 378 | 0.20 | 2.5×10^{-2} | 2.6×10^{-3} |
| 0.06 | 520 | 0.34 | 4.3×10^{-2} | 4.2×10^{-3} |

表1.数値実験結果

「参考文献」

[1]Y. Watanabe, *A numerical verification method for two-coupled elliptic partial differential equations*, Japan J. Indust. Appl. Math, 26 (2009), 233–247.

[2]K.Sekine, A.Takayasu and S.Oishi: Computer assisted proof for existence of solutions to a system of elliptic partial differential equations, The International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Tokyo.

[3]関根晃太, 田中一成, 高安亮紀, 大石進一, ”重み付きノルムによる特異摂動問題の精度保証付き数値計算結果の改善”, 2014年日本応用数理学会年会, 政策研究大学院大学