

不完全情報 AHP の諸問題

日大生産工(非常勤) ○篠原 正明

情報システム研究所 篠原 健

1. はじめに

AHP において、一部要素が欠落した不完全な対比較行列から DAP にもとづきウェイトベクトルを推定する際の諸問題(不完全情報 DAP の更新式、整合性とトポロジー条件、内外評価不等式、逆固有ベクトル問題、重み付き DAP、連続判断 AHP の DAP、連続時間・連続判断 AHP の DAP)を考察し、それらの解答を与える。

2. 不完全情報 DAP の更新式

$$\text{DAP 更新式: } \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{D}(\mathbf{n})^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) \quad (2.1)$$

$$\text{定常解: } \mathbf{x}(t+1) = \nu \mathbf{x}(t), \nu \mathbf{D}(\mathbf{n}) \mathbf{x} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} \quad (2.2)$$

$$\text{誤差行列 } \mathbf{E}: \nu \mathbf{D}(\mathbf{n}) \mathbf{1} = \mathbf{E} \mathbf{1}, \mathbf{E} = \mathbf{D}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{D}(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

但し、 $\mathbf{D}(\mathbf{n}) = \text{diag}(\mathbf{n}_i)$, $\mathbf{n}_i$ は第 i 行測定数、 $\mathbf{A}_0$ を欠落要素を 0 と置換した $m \times m$ 比較行列とする。

3. 整合性とトポロジー条件

3.1 整合性指標 誤差平均として、

$$\text{ave}(\mathbf{E}) = \text{ave.ind.exm}(\mathbf{E}) = \mathbf{1}^T \mathbf{E} \mathbf{1} / N = \nu \quad (3.1)$$

を採用する。但し、 $N = \sum \mathbf{n}_i$, ind は including diagonal, exm は excluding missing で、平均対象として対角要素は含み、欠落要素は除外した。

$$\text{整合度: } \mathbf{CJ} = \text{ave}(\mathbf{E}) - 1 = \nu - 1 \quad (3.2)$$

$\mathbf{A}_0$ で (欠落要素対を除いて) 逆比性が成立すれば、 $\nu \geq 1$ (3.3) が成立し、 $\mathbf{CJ} \geq 0$ (3.4) も成立する。Saaty 氏による整合度 $\mathbf{CI}$ においても $\mathbf{CI} \geq 0$ (3.5) が成立する。

$$\mathbf{CI} = \mathbf{CJ} \cdot N / (N - m) \quad (3.6)$$

3.2 トポロジー条件 完全情報下では、「 $a_{ii} = 1$, 逆比性 $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$, 三角整合性 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ 」(3.7) ならば、 $\mathbf{CI} = 0$ であるが、不完全情報下での $\mathbf{CI} = \mathbf{CJ} = 0$ の条件は?

一対比較デザイングラフにおいて、「任意の 2 点 ($i-j$) 間の任意パスの一対比較重み積が同じ値 g_{ij} に等しい条件」を「等長パス性」と定義する。

〔定理 3.1〕 不完全情報下での整合性トポロジー定理 $\mathbf{CI} = \mathbf{CJ} = 0$ の必要十分条件は、等長パス条件 (に加えて、エルゴード (強連結) 条件と非周期性条件) が成立することである。

以下に証明の概略を示す (詳細ならびに関連する考察は [1] 参照)。

不完全情報下の一対比較行列 $\mathbf{A}_0$ において、欠落要素は 0 で、欠落要素以外を 1 とした行列 $\mathbf{A}_1$ (無向グラフの一種の点一点接続行列) を考える。 $\mathbf{H} = \mathbf{D}(\mathbf{n})^{-1} \mathbf{A}_1$ と置くと、行列 $\mathbf{H}$ は行確率行列である。従って、エルゴード性と非周期性を仮定すると、

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}^t (t \rightarrow \infty) \quad (3.8)$$

と定常状態に収束する。すなわち、更新式

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{D}(\mathbf{n})^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) = \mathbf{H} \mathbf{x}(t) \quad (3.9)$$

も収束する。DAP 更新式(2.1)と更新式(3.9)、あるいは係数行列の $\mathbf{P} = \mathbf{D}(\mathbf{n})^{-1} \mathbf{A}_0$ と $\mathbf{H} = \mathbf{D}(\mathbf{n})^{-1} \mathbf{A}_1$ を対比し、等長パス性が成立すれば、ここで $\mathbf{H}^t$ と $\mathbf{P}^t$ のトポロジの意味を考慮して、 $\mathbf{S} = \mathbf{P}^t (t \rightarrow \infty)$ に対して、 $s_{ij} = r_{ij} \cdot g_{ij}$

$$(3.10)$$

が成立する (但し、 $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}$, $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}$, $r_{ij} = \frac{n_i}{N}$)。

従って、 $t \rightarrow \infty$ の DAP 更新式(2.1)において、 $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t)$ 、すなわち $\nu = 1$ が成立し、 $\mathbf{CI} = \mathbf{CJ} = 0$ が成立する。〔QED〕

4. 内外評価不等式

完全情報での [2] の結果を行列表示で整理し、この内外評価不等式が不完全情報 DAP でも成立することを示す。

4.1 完全情報 DAP

$$\mathbf{x}(t+1) = \frac{\mathbf{A} \mathbf{x}(t)}{m} \quad (4.1) \text{ において、} \mathbf{x}(t+1) = \mu \mathbf{x}(t) = \mu \mathbf{x} \text{ とすると、}$$

$$(\mathbf{CI}+1) \mathbf{x} = \frac{(\mathbf{A}-\mathbf{I}) \mathbf{x}}{m-1} \quad (4.2)$$

$$(\mathbf{CJ}+1) \mathbf{x} = \mu \mathbf{x} = \frac{\mathbf{A} \mathbf{x}}{m} \quad (4.3)$$

が成立する。両式において左辺の $\mathbf{x}$ が内部 (真の自己) 評価ウェイトベクトル、右辺が外部評価である。(4.2) では自分を除いた外部、(4.3) では自分も含めた外部 (というよりは、全体) 評価である。 $\mathbf{CI}+1 \geq 1$, $\mathbf{CJ}+1 = \mu \geq 1$ なので、内 $\leq$ 外不等式が成立する。すなわち、外部評価は常に内部評価よりも高く、その乖離度合いは不整合性に比例する。

4.2 不完全情報 DAP

(2.2) より、以下を得る。

$$(\mathbf{D}(\mathbf{n}) - \mathbf{I})^{-1} (\nu \mathbf{D}(\mathbf{n}) - \mathbf{I}) \mathbf{x} = (\mathbf{D}(\mathbf{n}) - \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{A}_0 - \mathbf{I}) \mathbf{x} \quad (4.4)$$

$$\text{diag}\left\{\frac{\nu n_i - 1}{n_i - 1}\right\} \mathbf{x} = \text{diag}\left\{\frac{1}{n_i - 1}\right\} (\mathbf{A}_0 - \mathbf{I}) \mathbf{x} \quad (4.5)$$

(4.5)は(4.4)の別表現である。右辺が外部評価であり、 A_0 の逆比性仮定の下では $\nu \geq 1$ なので、左辺の x_i の乖離度合い係数 $\frac{\nu n_i - 1}{n_i - 1} \geq 1$ となる。従って、完全情報の場合と同様に

内 $\leq$ 外不等式が成立する。但し、乖離度合いは x_i 毎に n_i に依存して、異なりうる。すなわち、被評価対象数が多いほど、乖離度合いは小さくなる。なお、内 $\leq$ 全不等式はより単純な(4.6)となり、同様に成立する。

$$\nu x = D(n)^{-1} A_0 x \quad (4.6)$$

なお、(4.7), (4.8)の等式変形より、内外不等式と内全不等式は等価であることがわかる。

$$\frac{A-I}{m-1} - I = \frac{m}{m-1} \left(\frac{A}{m} - I \right) \quad (4.7)$$

$$(D(n)-I)^{-1}(A_0-I)-I = D(n)(D(n)-I)^{-1}[D(n)^{-1}A_0-I] \quad (4.8)$$

5. 重み付き DAP (あるいは w-DAP)

不完全情報 DAP では一対比較行列 A の一部要素が欠落した場合を扱ったが、欠落要素をその重みが 0 と考えることにより、 (i, j) 要素に対して重み w_{ij} を考慮した w-DAP を提案し、その更新式を以下に示す。

$$\text{更新式: } x(t+1) = \sum_j w_{ij} a_{ij} x_j(t) \quad (5.1)$$

$$x(t+1) = (W \circ A)x(t) \quad (5.2)$$

(5.2)は(5.1)のベクトル行列表現で、 $\circ$ は要素毎の乗算を意味する。 $x(t+1) = \kappa x(t) = \kappa x$ とすると、以下を得る。

$$\text{定常解: } \kappa x = (W \circ E)x \quad (5.3)$$

$$\text{誤差行列: } \kappa 1 = (W \circ E)1, E = D(x)^{-1} A D(x) \quad (5.4)$$

一般論では、 $W = \{w_{ij}\}$ は任意であるが、以下は $W \geq 0$, $\sum w_{ij} = 1$ の条件を付与した行確率行列の場合を考察する。又、一対比較行列 $A = \{a_{ij}\}$ は完全情報であり、欠落無しである。

$$\text{誤差平均: } \text{ave}(E) = 1^T (W \circ E) 1 / m = \frac{1}{m} \sum_{i,j} w_{ij} e_{ij} = \kappa \quad (5.5)$$

ここで、 $\text{ave}(E) = \kappa$ は全要素 m^2 個の重み w_{ij} 付き平均で、欠落要素は $w_{ij} = 0$ とし、非欠落要素は行毎に重みを $w_{ij} = 1/n_i$ と均等化すると、不完全情報 DAP を模擬し、そのときの(5.5)の κ と(3.1)の ν は一致する。なお、w-DAP で不完全情報を模擬する場合は、欠落要素 (i, j) は測定しなかったのではなく、測定値 a_{ij} (さらには e_{ij}) は存在するが、その重み $w_{ij} = 0$ で完全に無視するという立場である。さらに、 A の逆比性を仮定し、 W を対称確率行列 ($w_{ij} = w_{ji}$, $w_{ij} \geq 0$, $\sum_j w_{ij} = 1$) とすれば、 $\kappa \geq 1$ が成立する。

6. 連続判断 AHP の不完全情報 DAP

Saaty の NNP[3]における完全情報下の離散判断と連続判断での固有値問題定式化は各々(6.1), (6.2)で与えられる。

$$Ax = \lambda x, \sum a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad (6.1)$$

$$\int K(u, v)x(v)dv = \lambda x(u) \quad (6.2)$$

(6.1)の行列表現にて、 A を無限次元とし、 i を u , j を v に対応させれば、連続判断での定式化となる。時間変数を t で表すと、不完全情報下の連続判断 DAP の定式化は以下のとおりである(積分は $K(u, v)$ の定義域、非定義域: $K(u, v) = 0$)。

$$x(u, t+1) = \frac{\int K(u, v)x(v, t)dv}{\int 1(u, v)dv} \quad (6.3)$$

$$x(t+1) = D(n)^{-1} A_0 x(t) \quad (6.4)$$

(6.4)は積分表現(6.3)の行列表現である。(6.4)にて、 x , $D(n)$, A_0 は無限次元である。(6.4)の第 i 式は(6.5)となるが、 n_i が(6.3)右辺の分母 $\int 1(u, v)dv$ に対応する。但し、 $1(u, v)$ は行列 A_1 に対応し、 $K(u, v)$ の定義域 (非欠落域) では 1、それ以外で 0 をとる関数である。なお、原著[3]では $K(u, v)$ にて変数 (s, t) を使用してるが、本論文では t を時間変数として使うので (u, v) を用いた。

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in S_i} a_{ij} x_j(t) / n_i \quad (6.5)$$

積分表現(6.3)と行列表現(6.4)が等価なので、(6.4)と(2.1)が対応し、2~4 章の議論が積分表現でも適用できる。

例えば、(2.2)の定常解は(6.6)、(2.3)の誤差行列は(6.7)、(3.1)の誤差平均 $\text{ave}(E)$ は(6.8)、3 章の行確率行列 $H = D(n)^{-1} A_1$ は(6.9)、(4.6)の内 $\geq$ 全不等式は(6.10)、(4.4)の内 $\geq$ 外不等式は(6.11)となる。

$$\text{定常解: } \nu x(u) = \frac{\int K(u, v)x(v)dv}{\int 1(u, v)dv} \quad (6.6)$$

誤差関数:

$$\nu \int 1(u, v)dv = \int E(u, v)dv, E(u, v) = K(u, v) \frac{x(v)}{x(u)} \quad (6.7)$$

$$\text{誤差平均: } \text{ave}(E) = \frac{\iint E(u, v)dvdu}{\iint 1(u, v)dvdu} = \nu \quad (6.8)$$

$$\text{行確率行列 } H(u, v) = \frac{1(u, v)}{\int 1(u, v)dv} \quad (6.9)$$

$$\text{内} \leq \text{全不等式: } \nu x(u) = \frac{\int \kappa(u, v)x(v)dv}{\int 1(u, v)dv} \quad (6.10)$$

$$\text{内} \leq \text{外不等式: } x(u) \frac{\nu \int 1(u, v)dv - 1}{\int (1(u, v) - \delta(u, v))dv} =$$

$$\frac{\int (\kappa(u,v) - \delta(u,v))x(v)dv}{\int (1(u,v) - \delta(u,v))dv} \quad (6.11)$$

(6.8)において、離散判断の時と同じ論理で、 $K(u,v)(\geq 0)$ が逆比性を持てば、誤差関数 $E(u,v)(\geq 0)$ も逆比性を持ち、定義域は u と v に関して対称と仮定すれば、
 $K(u,v)+1/K(u,v) \geq 2$ (6.12) が成立するので、 $v \geq 1$ (6.13) を得る。従って、この場合には内 $\leq$ 全不等式(6.10)、内 $\leq$ 外不等式(6.11)が成立する。(6.11)ではデルタ関数を導入するなど、厳密性の観点からは問題があり、その意味では、内 $\leq$ 全不等式が本質的と言える。又、連続判断での定式化において、 $K(u,v)=a_{uv} \delta(u-i) \delta(v-j)$,
 $x(u) = x_u \delta(u-i)$ (6.14)等とすれば、離散判断での定式化に帰着する。

7. 連続時間・連続判断 AHP の DAP

$x(t+1) = Bx(t)$ と $\frac{dx(t)}{dt} = Cx(t)$ を比較すると、離散時間上で両者が同じ値となるためには、 $B = \exp(C)$ (7.1) あるいは $C = \log B$ (7.2)、一次近似で $C = B - I$ (7.3)を得る。 $B = A/m$ or $D(n)^{-1}A_0$ (7.4) とすると、内全評価差を時間変化の原因とする微分方程式モデルを得る。

〔連続時間・離散判断の DAP〕

$$\text{完全情報: } \frac{dx}{dt} = k(A/m - I)x \quad (7.5)$$

$$\text{不完全情報: } \frac{dx}{dt} = k(D(n)^{-1}A_0 - I)x \quad (7.6)$$

〔連続時間・連続判断・不完全情報の DAP〕

$$\frac{dx(u)}{dt} = k \left\{ \frac{\int K(u,v)x(v)dv}{\int 1(u,v)dv} - x(u) \right\} \quad (7.7)$$

$k > 0$ は比例定数、(7.7)の右辺は内全評価差 ((6.10)参照) となっている。

8. 逆固有ベクトル問題

(2.3)を再掲し、誤差方程式(8.1)と呼ぶ。

$$E1 = v D(n)1 \quad (8.1)$$

(8.1)において、固有値 (定常成長率) v 、デザイングラフ G が与えられた下で、 E を求める問題が逆固有ベクトル問題である。以下では、対欠落、逆比性、自己同一性 ($a_{ii}=1$)、対角要素非欠落を仮定する。なお、 G は無向グラフとなり、 G より $n = \{n_i\}$ がわかる。

G において節点 i は項目 i に対応し、節点 i に接続する

無向枝 (i, j) 、 $j \in S_i$ が付随し、誤差方程式(8.1)の第 i 行は (8.2)となり、誤差和 $\sum_j e_{ij}$ が $v n_i$ に等しいことを主張する。但し、 $n_i = |S_i|$ 。

$$\sum_{j \in S_i} e_{ij} = v n_i \quad i = 1, \dots, m \quad (8.2)$$

(8.1)の各行、あるいは(8.2)は行毎に独立であり、従って、

$$\text{独立な方程式の数 } |Q| = [G \text{ の点数 } |V|] = m \quad (8.3)$$

$$\text{未知変数の数 } |U| = [G \text{ の枝数 } |L|] = \frac{N-m}{2} \quad (8.4)$$

$$\text{自由変数の数 } |F| = |U| - |Q| \quad (8.5)$$

すなわち、未知変数群 $U =$ 従属変数群 $Q +$ 自由 (独立) 変数群 F (8.6)。

以下に、 Q (あるいは F) の選び方を考察する。

(i) G 上で従属変数(枝)群 Q が連結な場合

木枝数 = $m-1$ 、かつ、 m 個の節点对応の各独立方程式は接続枝対応の変数を含むことを考慮して、 Q として G 上の単閉路木 (SL 木、Single Loop Tree) を選ぶ。ここで、SL 木とは木に 1 本の補木枝を付加したグラフである。SL 木では、唯一存在する閉路の各節点に部分木が接続するトポロジー (図 8.1) を持つ。

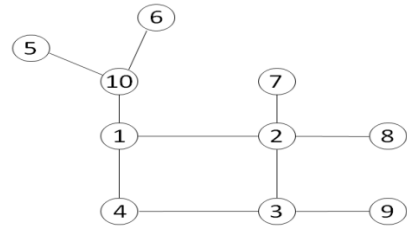


図 8.1 単閉路木 (SL 木) のトポロジー例

F を与えれば、(単閉路上を除く) 部分木上の Q が定まり、残るは単閉路上の Q のみとなるが、これらは 2 次方程式を解くことにより、定まる (付録 1 参照)。

(ii) G 上で従属変数(枝)群 Q が非連結な場合

G の節点集合 V を被覆して非連結な SL 木の集合へ分割する。 V を疎な節点集合群 $\{V_1, V_2, \dots, V_z\}$ へと分割し、部分集合 V_i と V_i 内を相互接続する枝からなる各部分グラフ $G[V_i]$ ($i = 1, \dots, z$) において SL 木を変数として選ぶ。
 $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_z, V_i \cap V_j = \emptyset$ ($i \neq j$), $|V_i| \geq 3$ (8.7)

〔例 8.1〕 図 8.2(a) のデザイングラフ G において、

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ と 1 つの (連結な) SL 木、

$V = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 6, 7, 8\}$ と 2 つの SL 木、

$V = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6, 7, 8\}$ と 2 つの SL 木、

として Q を選んだ例を図 8.2(b), (c), (d) に示す。

