ISSN 2186-5647

1-41

応力法による鋼構造平面骨組の弾塑性解析に関する研究
－その１．塑性ヒンジ法　－

日大生産工（院）　　○秋山　侑槻　日大生産工　川島　晃
（株）中田捷夫研究室　常川　重樹

1.　はじめに

骨組の弾塑性解析は多数の研究[例えば1)～3)]があるが､それら全ての方法は変位法に基づいている。また、塑性ヒンジ点における断面力と塑性変形（相対変形）との関係を節点力と節点変位との関係に置き換える欠点を持っている[4)]。一方、独立な応力を未知量とする応力法は｢節点変位を求めるために特別な計算手続きを必要とするため､汎用解法として適切な手法の確立が困難とされてきた｣[4)]。この欠点は荷重が徐々に作用したときに不安定となる構造安定問題と不安定構造の安定化移行問題を含む解法に有効なムーア･ペンローズ一般逆行列理論を用いることにより解消される[5)～8)]。本報では応力法による弾塑性解析の第１報として､支配方程式である釣合式に塑性条件（塑性変形増分と応力増分の直交則）を組み込んだ塑性ヒンジ法（釣合行列のランク問題を包含する）を提案する。

２．塑性ヒンジ法と基本関係式の骨子

2.1 塑性ヒンジ法

断面全体の降伏条件は重心点の断面力（曲げモーメントm、軸方向力n）の関数として、次式のように仮定する。

$$f(\mathrm{m},\mathrm{n})=1 \tag{1}$$

$f(\mathrm{m},\mathrm{n})$ の具体例を次式のようにおいてみる。

$$f(\mathrm{m},\mathrm{n})=\left|\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}^0}\right|+\left|\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}^0}\right|=1 \tag{2}$$

式(2)の m^0 は全塑性曲げモーメント、n^0 は降伏軸力である。断面力が式(2)を満足するとき、その重心点に塑性ヒンジが形成される（塑性ヒンジ点以外では塑性変形は生じない)。荷重と変形の経路を区分的に線形化して追跡するとき、ある既知の状態量（m, n 等）が得られたとする。この増分後の塑性条件は増分記号をΔとして、

$$f(\mathrm{m}+\Delta\mathrm{m},\mathrm{n}+\Delta\mathrm{n})=\left|\frac{\mathrm{m}+\Delta\mathrm{m}}{\mathrm{m}^0}\right|+\left|\frac{\mathrm{n}+\Delta\mathrm{n}}{\mathrm{n}^0}\right|=1 \tag{3}$$

で表せる。式(3)から式(2)を差し引くと、

$$\left|\frac{\Delta\mathrm{m}}{\mathrm{m}^0}\right|+\left|\frac{\Delta\mathrm{n}}{\mathrm{n}^0}\right|=0 \tag{4}$$

となる。式(2)のｍ、ｎに関する偏微分と式(4)左辺との対応は次式のように書ける。

$$\frac{\partial f}{\partial\mathrm{m}}=\pm\frac{1}{\mathrm{m}^0},\ \frac{\partial f}{\partial\mathrm{n}}=\pm\frac{1}{\mathrm{n}^0}\ （符号＋：\mathrm{m}>0\,,\mathrm{n}>0）\tag{5-1, 2}$$

塑性条件は、式(4)と式(5)から次式で表せる。

$$\frac{\partial f}{\partial\mathrm{m}}\Delta\mathrm{m}+\frac{\partial f}{\partial\mathrm{n}}\Delta\mathrm{n}=0\quad（図１参照）\tag{6}$$

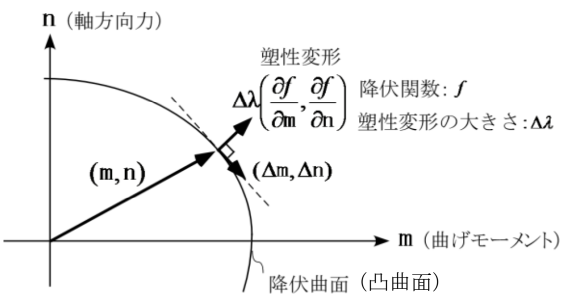

図１　塑性ヒンジ法

2.2 増分間の塑性条件

部材(p)の塑性条件（式(6)）は次式で表す。

$$\boldsymbol{f}'^{\mathrm{T}}_{(\mathrm{N,p})}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(\mathrm{N,p})}=0\qquad（\mathrm{T}:\ 転置）\tag{7}$$

ここに、添字（N,p）の N は材軸線 y^1 上の位置を表す印である。$\boldsymbol{f}'_{(\mathrm{N,p})}$ は降伏曲面上における塑性変形ベクトル（図１の $(\partial f/\partial\mathrm{m},\partial f/\partial\mathrm{n})$）である。$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(\mathrm{N,p})}$ は未知量である独立な材端断面力ベクト

Study on Elastic-Plastic Analysis of Steel Plane Frames by the Stress Method

- Part 1.　Plastic-Hinge method -

Yuki AKIYAMA, Akira KAWASHIMA and Shigeki TSUNEKAWA

ルである（図２参照）。

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,p) = [\Delta m(A,p), \Delta m(B,p), \Delta n(p)]^T \tag{8}$$

降伏曲面の法線ベクトル $\boldsymbol{f}'(N,p)$ は式(8)右辺の記号を使うと式(9-a, b)のように表せる。

ａ）材端(A)が塑性ヒンジのとき：

$$\boldsymbol{f}'(N,p) = \boldsymbol{f}'(A,p) = \left[\frac{\partial f}{\partial m(A,p)},\ 0,\ \frac{\partial f}{\partial n(p)}\right]^T \tag{9-a}$$

ｂ）材端(B)が塑性ヒンジのとき：

$$\boldsymbol{f}'(N,p) = \boldsymbol{f}'(B,p) = \left[0,\ \frac{\partial f}{\partial m(B,p)},\ \frac{\partial f}{\partial n(p)}\right]^T \tag{9-b}$$

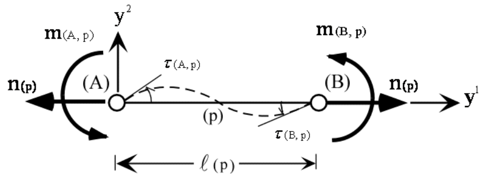

図２　独立な材端断面力と相対たわみ角

2.3 基本関係式の骨子

2.3.1 仮定事項および記号の約束

１）部材は断面の重心線（**図2**の y^1 軸）で表す。

２）荷重は節点にのみ作用するものとする。

３）部材および骨組は常に初期形状を一定に保つものとする（微小変形の仮定）。その他、平面保持の仮定など、棒材の理論に従う。

増分記号はΔ、塑性化記号は上付添字０で表す。ベクトルは小文字太字、行列は大文字太字の英字とギリシャ文字で表す。また、列ベクトルは成分表示するとき[ ]で、行ベクトルは{ }で表す。行列の転置は上付添字Ｔで表す。

2.3.2 釣合式

ｉ）弾性状態：

$$\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\mathbf{m} \tag{10}$$

ここに、$\mathbf{D}$ は釣合行列である。$\Delta\boldsymbol{\sigma}$（未知量）は $\Delta\boldsymbol{\sigma}(N\,p)$（式(8)）を部材番号順に並べたベクトルである。$\Delta\mathbf{m}$ は節点(N)に与える曲げ荷重 $\Delta m(N)$ と水平２方向の荷重ベクトル $\Delta\mathbf{f}(N)$ を節点番号順に並べたベクトルである。

ⅱ）塑性状態：まず、部材(p)の塑性条件（式(7)）は未知量 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ で表す。具体的には次のようになる。

塑性化順序を(q)で表し、$\boldsymbol{f}'^T(N,p)$ は $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ の並び順に合わせて $\mathbf{d}^0(q)$ で表す。

$$\boldsymbol{f}'^T(N,p)\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,p) = 0 \rightarrow \quad \mathbf{d}^0(q)\Delta\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{11}$$

ａ）材端(A)が塑性ヒンジのとき：

$$\mathbf{d}^0(q) = \left\{\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial m(A,p)},\ 0,\ \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial n(p)}),\cdots\right\} \tag{12-a}$$

ｂ）材端(B)が塑性ヒンジのとき：

$$\mathbf{d}^0(q) = \left\{\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,(0,\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial m(B,p)},\ \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial n(p)}),\cdots\right\} \tag{12-b}$$

$$\mathbf{0} = \{0,0,0\} \tag{12-c}$$

式(11)は塑性化の順番に作成して、$\mathbf{D}^0$ で表す。

$$\mathbf{d}^0(q)\Delta\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (q = 1,2,\cdots) \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}^0\Delta\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{13}$$

塑性条件（式(13)）は弾性状態の釣合式（式(10)）の末尾に組み込む（式(14)）。

$$\text{弾塑性状態：}\begin{pmatrix}\mathbf{D}\\ \cdots\\ \mathbf{D}^0\end{pmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\Delta\mathbf{m}\\ \cdots\cdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \tag{14}$$

式(13)において、

$$\mathbf{D}^0 = \begin{bmatrix}\mathbf{d}^0(1)\\ \mathbf{d}^0(2)\\ \vdots\\ \mathbf{d}^0(q)\\ \vdots\end{bmatrix},\quad \Delta\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,1)\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}(N,2)\\ \vdots\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}(N\,p)\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{15-a, b}$$

式(14)に次の記号を用いる。

$$\overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix}\mathbf{D}\\ \cdots\\ \mathbf{D}^0\end{pmatrix},\quad \Delta\overline{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix}\Delta\mathbf{m}\\ \cdots\cdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \tag{16-a, b}$$

$$\overline{\mathbf{D}}\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\overline{\mathbf{m}} \tag{17}$$

2.3.3 幾何学的関係式

部材(p)の相対たわみ角 $\Delta\tau(A,p), \Delta\tau(B,p)$（**図２**）と伸縮 $\Delta\delta\ell(p)$ はまとめてベクトル記号 $\Delta\boldsymbol{\tau}(N\,p)$ で表し、部材番号順に並べて $\Delta\boldsymbol{\tau}$ とする。また節点(N)の節点角を $\Delta\theta(N)$、変位ベクトルを $\Delta\mathbf{u}(N)$ として節点番号順に並べて $\Delta\boldsymbol{\theta}$ とする（式(18)、式(19)）。

$$\Delta\boldsymbol{\tau}(N\,p) = [\Delta\tau(A,p), \Delta\tau(B,p), \Delta\delta\ell(p)]^T \tag{18-a}$$

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = [\Delta\boldsymbol{\tau}(N,1), \Delta\boldsymbol{\tau}(N,2), \cdots]^T \tag{18-b}$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = [\Delta\theta(1), \Delta\mathbf{u}(1), \Delta\theta(2), \Delta\mathbf{u}(2), \cdots]^T \tag{19}$$

$\Delta\boldsymbol{\tau}$ と $\Delta\boldsymbol{\theta}$ の関係は式(17)に対応する関係式で表す必要がある。そこで、式(16-b)の $\Delta\overline{\mathbf{m}}$ に対応する節点変位ベクトルを $\Delta\overline{\boldsymbol{\theta}}$（式(20)）で表す。

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\theta}} = [\Delta\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{0}]^{T} \qquad (20)$$

式(20)は仮想仕事の原理（$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{T}\Delta\boldsymbol{\tau} = \Delta\mathbf{m}^{T}\Delta\boldsymbol{\theta}$）を満たすことは明らかである。つまり、次式が成立する。

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{D}}^{T}\Delta\bar{\boldsymbol{\theta}} \quad (\equiv \mathbf{D}^{T}\Delta\boldsymbol{\theta}) \qquad (21)$$

式(21)の一般解は、$\bar{\mathbf{D}}$ のムーア・ペンローズ一般逆行列[6]を $\bar{\mathbf{D}}^{+}$ とすると次式で表せる。

$$\text{特解}: \Delta\bar{\boldsymbol{\theta}}^{P} = (\bar{\mathbf{D}}^{T})^{+}\Delta\boldsymbol{\tau} = (\bar{\mathbf{D}}^{+})^{T}\Delta\boldsymbol{\tau} \qquad (22\text{-a})$$

$$\text{余解}: \Delta\bar{\boldsymbol{\theta}}^{C} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^{+})\Delta\boldsymbol{\alpha} \qquad (22\text{-b})$$

ここに、$\mathbf{I}$ は単位行列、$\Delta\boldsymbol{\alpha}$ は任意ベクトルである。余解は変形ベクトル $\Delta\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ の解であるから崩壊機構のリンク運動を表す。

2.3.4 塑性ヒンジ法に適用される構成式[2)][3)]

塑性ヒンジ点の断面力ベクトル $\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,p)$（式(8)）の成分量は降伏曲面上に沿って変化するが、これは弾性変形の変化量によるものである。以後、$\Delta\boldsymbol{\tau}(N,p)$ と $\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,p)$ の弾性部分は上付き添字 e を付けて表す。また、塑性変形の大きさを表す記号は $\Delta\lambda(N,p)$ とする（**図１**を参照)。

$$\Delta\boldsymbol{\tau}(N,p) = \Delta\boldsymbol{\tau}^{e}(N,p) + \Delta\boldsymbol{\tau}^{0}(N,p) \qquad (23\text{-a})$$

$$\Delta\boldsymbol{\tau}^{0}(N,p) = \Delta\lambda(N,p)\,\boldsymbol{f}'(N,p) \qquad (23\text{-b})$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,p) = \Delta\boldsymbol{\sigma}^{e}(N,p) \qquad (24)$$

$\Delta\boldsymbol{\tau}(N,p)$ と $\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,p)$ の関係式は弾塑性柔性行列を $\mathbf{H}(p)$ として次式で表す。

$$\Delta\boldsymbol{\tau}(N,p) = \mathbf{H}(p)\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,p) \qquad (25)$$

弾性部分の関係式は、柔性行列を $\mathbf{H}^{e}(p)$ とすると次式のように表せる。

$$\Delta\boldsymbol{\tau}^{e}(N,p) = \mathbf{H}^{e}(p)\Delta\boldsymbol{\sigma}^{e}(N,p) \qquad (26\text{-a})$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{e}(N,p) = \mathbf{H}^{e}(p)^{-1}\Delta\boldsymbol{\tau}^{e}(N,p) \qquad (26\text{-b})$$

ここに、弾性柔性行列 $\mathbf{H}^{e}(p)$ は断面主軸に関する断面二次モーメントを I(p)、部材(p)の断面積を A(p)、材長を $\ell(p)$ とすると弾性曲線式より

$$\mathbf{H}^{e}(p) = \begin{bmatrix} 2h(p) & -h(p) & 0 \\ -h(p) & 2h(p) & 0 \\ 0 & 0 & s(p) \end{bmatrix} \qquad (27)$$

式(27)の成分は

$$h(p) = \frac{\ell(p)}{6EI(p)} \quad , \quad s(p) = \frac{\ell(p)}{EA(p)} \qquad (28\text{-a, b})$$

である。

（１）材端(A)または材端(B)が塑性化したとき（記号：N＝A or B）

式(23-a, b)より、次式が得られる。

$$\Delta\boldsymbol{\tau}^{e}(N,p) = \Delta\boldsymbol{\tau}(N,p) - \Delta\lambda(N,p)\,\boldsymbol{f}'(N,p) \qquad (29)$$

式(29)を式(26-b)右辺に代入して式(24)を用いると、次式で表せる。

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,p) = \mathbf{H}^{e}(p)^{-1}(\Delta\boldsymbol{\tau}(N,p) - \Delta\lambda(N,p)\,\boldsymbol{f}'(N,p)) \qquad (30)$$

上式右辺第１項（　）内の $\Delta\lambda(N,p)$ は $\boldsymbol{f}'(N,p)$ と $\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,p)$ の直交則（**図１**）より求める。すなわち、

$$\boldsymbol{f}'(N,p)^{T}\mathbf{H}^{e}(p)^{-1}(\Delta\boldsymbol{\tau}(N,p) - \Delta\lambda(N,p)\,\boldsymbol{f}'(N,p)) = 0 \qquad (31)$$

より、$\Delta\lambda(N,p)$ は次式で与えられる。

$$\Delta\lambda(N,p) = \left\{ \frac{\boldsymbol{f}'(N,p)^{T}}{\boldsymbol{f}'(N,p)^{T}\mathbf{H}^{e}(p)^{-1}\boldsymbol{f}'(N,p)}\mathbf{H}^{e}(p)^{-1} \right\}\Delta\boldsymbol{\tau}(N,p) \qquad (32)$$

式(32)を式(29)に代入すると、弾性変形 $\Delta\boldsymbol{\tau}^{e}(N,p)$ は次式で与えられる。

$$\Delta\boldsymbol{\tau}^{e}(N,p) = \left\{ \mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{f}'(N,p)^{T}}{\boldsymbol{f}'(N,p)^{T}\mathbf{H}^{e}(p)^{-1}\boldsymbol{f}'(N,p)}\mathbf{H}^{e}(p)^{-1} \right\}\Delta\boldsymbol{\tau}(N,p) \qquad \cdots(33)$$

ここに、$\mathbf{I}$ は単位行列である。

次に、弾塑性柔性行列 $\mathbf{H}(p)$ を誘導する。

式(26-a)と式(24)の関係より、

$$\Delta\boldsymbol{\tau}^{e}(N,p) = \mathbf{H}^{e}(p)\Delta\boldsymbol{\sigma}(N,p) \qquad (34)$$

上式左辺 $\Delta\boldsymbol{\tau}^{e}(N,p)$ に式(33)を代入すると、$\mathbf{H}(p)$（式(25)）は次式で与えられる。

$$\mathbf{H}(p) = \left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{f}'(N,p)\boldsymbol{f}'(N,p)^{T}}{\boldsymbol{f}'(N,p)^{T}\mathbf{H}^{e}(p)^{-1}\boldsymbol{f}'(N,p)}\mathbf{H}^{e}(p)^{-1} \right)^{-1}\mathbf{H}^{e}(p) \qquad (35)$$

（２）材端(A)(B)が共に塑性化したとき

次の列ベクトル記号を使う。

$$\mathbf{F}0 = [\boldsymbol{f}'(A,p),\ \boldsymbol{f}'(B,p)] \qquad (36\text{-a})$$

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}(p) = [\Delta\lambda(A,p), \Delta\lambda(B,p)]^{T} \qquad (36\text{-b})$$

弾性部分の変形ベクトル $\Delta\boldsymbol{\tau}(N,p)^{e}$ は式(29)と同様に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\tau}(N,p)^{e} &= \Delta\boldsymbol{\tau}(N,p) - \Delta\lambda(A,p)\,\boldsymbol{f}'(A,p) - \Delta\lambda(B,p)\,\boldsymbol{f}'(B,p) \\ &= \Delta\boldsymbol{\tau}(N,p) - \mathbf{F}0\Delta\boldsymbol{\lambda}(p) \end{aligned} \qquad (37)$$

また、式(30)と同様に次式が成立する。

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)} = \mathbf{H}^{e}{}_{(p)}{}^{-1}\left(\Delta\boldsymbol{\tau}_{(N,p)} - \mathbf{F}_0\Delta\boldsymbol{\lambda}_{(p)}\right) \qquad (38)$$

塑性変形増分と応力増分の直交則（**図１**）は、次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}'_{(A,p)}{}^{T} \\ \boldsymbol{f}'_{(B,p)}{}^{T} \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \mathbf{F}_0{}^{T}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)} = \mathbf{0} \qquad (39)$$

式(39)に式(38)を代入して整理すると、次のように行列表現することができる。

$$\mathbf{F}_1\Delta\boldsymbol{\tau}_{(N,p)} = \mathbf{F}_2\Delta\boldsymbol{\lambda}_{(p)} \qquad (40)$$

ここに、

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_0{}^{T}\mathbf{H}^{e}{}_{(p)}{}^{-1} \qquad (41\text{-a})$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_0{}^{T}\mathbf{H}^{e}{}_{(p)}{}^{-1}\mathbf{F}_0 \quad \text{（対称行列）} \qquad (41\text{-b})$$

式(40)を $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{(p)}$ （式(36-b)）について解く。

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}_{(p)} = \mathbf{F}_2{}^{-1}\mathbf{F}_1\Delta\boldsymbol{\tau}_{(N,p)} \qquad (42)$$

式(42)を式(37)に代入すると弾性変形 $\Delta\boldsymbol{\tau}^{e}{}_{(N,p)}$ は次式で与えられる。

$$\Delta\boldsymbol{\tau}^{e}{}_{(N,p)} = (\mathbf{I} - \mathbf{F}_0\mathbf{F}_2{}^{-1}\mathbf{F}_1)\Delta\boldsymbol{\tau}_{(N,p)} \qquad (43)$$

次に、式(43)を式(34)に代入すると、弾塑性柔性行列 $\mathbf{H}_{(p)}$ （式(25)）は次式で与えられる。

$$\mathbf{H}_{(p)} = (\mathbf{I} - \mathbf{F}_0\mathbf{F}_2{}^{-1}\mathbf{F}_1)^{-1}\mathbf{H}^{e}{}_{(p)} \qquad (44)$$

骨組の構成式は、次式で表す。

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\sigma} \qquad (45)$$

ここに、$\mathbf{H}$ は柔性行列 $\mathbf{H}_{(p)}$ (弾性部材は式(27))を部材番号順に対角項に並べた行列である。

３．釣合式の一般解と変形の適合条件式

釣合式(式(17))の一般解 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ は次式で表せる。

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\boldsymbol{\sigma}^{P} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{C} \qquad (46)$$

ここに、

特解（非同次方程式の解）： $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{P} = \overline{\mathbf{D}}^{+}\Delta\overline{\mathbf{m}}$ (47)

余解（同次方程式の解） ： $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{C} = \mathbf{G}\Delta\boldsymbol{\gamma}$ (48)

上式右辺の $\Delta\boldsymbol{\gamma}$ は変形の適合条件式から求まる。行列 $\mathbf{G}$ は係数行列 $(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}}^{+}\overline{\mathbf{D}})$ の独立な列ベクトル（自己釣合応力モード $\mathbf{g}_i$ ）の集合である。不静定次数 r は $(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}}^{+}\overline{\mathbf{D}})$ の対角項の総和により求まる。

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \cdots, \mathbf{g}_r] \quad \text{（r：不静定次数）} \qquad (49)$$

変形の適合条件式は自己釣合応力モード $\mathbf{g}_i$ を仮想力とする仮想仕事式(式(50))で表せる。

$$\sum_{i=1}^{r}\mathbf{g}_i{}^{T}\Delta\boldsymbol{\tau} = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{G}^{T}\Delta\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \qquad (50)$$

式(50)は $\Delta\boldsymbol{\tau}$ に式(45)を代入して、一般解 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ （式(46)）で表すと次式となる。

$$\mathbf{G}^{T}\mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}^{T}\mathbf{H}(\Delta\boldsymbol{\sigma}^{P} + \mathbf{G}\Delta\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0} \qquad (51)$$

上式において、 $\mathbf{C} = \mathbf{G}^{T}\mathbf{H}\mathbf{G}$ (52)

とおくと、 $\Delta\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^{T}\mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{P}$ (53)

余　解： $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{c} = -\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^{T}\mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{P}$ (54)

一般解： $\Delta\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^{T}\mathbf{H})\Delta\boldsymbol{\sigma}^{P}$ (55)

となる。変位ベクトルの特解 $\Delta\overline{\boldsymbol{\theta}}^{P}$ は、式(22-a)に構成式（式(45)）を代入して求める。

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\theta}}^{P} = (\overline{\mathbf{D}}^{+})^{T}\Delta\boldsymbol{\tau} = (\overline{\mathbf{D}}^{+})^{T}\mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\sigma} \qquad (56)$$

4. あとがき

以上、独立な断面力と相対変形の関係式に基ずく塑性ヒンジの条件を釣合式に組み込んだ弾塑性解析を定式化した。その特色は次のようになる。

１）釣合式の特解 $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{P}$ （式(47)）は塑性ヒンジの条件を満足するので、釣合行列のランクにより崩壊機構形成とそのリンク運動を自動的に求めることができる（式(22-b)）。

２）余解 $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{c}$ （式(54)）は、特解を各部材の柔性関係により再配分する。従って、変形の適合行列 $\mathbf{C}$ （式(52)）が特異のとき応力の再配分ができないので塑性崩壊荷重の物理的意味が明快となる。

３） 幾何学的関係式(式(21))より、弾塑性変形 $\Delta\boldsymbol{\tau}_{(N,p)}$ と弾性変形 $\Delta\boldsymbol{\tau}^{e}{}_{(N,p)}$ （式(33)と式(43)）に依存する節点変位成分を抽出することができる。

参考文献

1) 成岡昌夫、児嶋弘行、平尾潔：平面鋼滑骨組の一自動弾塑性解析、日本建築学会論文報告集、250 号、pp. 19-29、1976
2) 花井正実、加来正義、松藤一利：繰り返し荷重を受ける鋼構造骨組の弾塑性解析、日本建築学会論文報告集、214 号、pp. 29-33、1973
3) 向後豊次、川島晃：繰返し外力を受ける鋼構造骨組の弾塑性大たわみ解析、日本建築学会論文報告集、321 号 pp. 38-48、1982
4) 近藤一夫：鋼構造骨組の塑性崩壊解析、コンピュータによる極限解析法シリーズ６、1991 年
5) 田中尚, 半谷裕彦：不安定トラスの剛体変位と安定化条件, 日本建築学会論文報告集，N0. 356，pp. 35-42，1985. 10
6) 半谷裕彦、川口健一：形態解析・一般行列の応用、培風館、1991. 4
7) 花井重孝，川島晃，石丸麟太郎，田中尚：立体ラーメンの微小変位応力解析（その２ 応力法），日本建築学会構造系論文集，第 570 号，pp. 61-68，2003. 8
8) A.Kwashima,Y.takeuchi,and S.Hanai: Shape Analysis of Self-Equilibrating Cable Networks with Initial Tension Adjusted by Stress Method, Journal of Structural Engineering, Vol.57B, pp.47-54, 2011.3