

DEA加法モデルについて

日大生産工

情報システム研究所

○篠原 正明

篠原 健

1. はじめに

DEAのCCRモデル、BCCモデル等の比率モデルの原型定式化として『最大絶対効率値に対する注目絶対効率値の比率としての相対効率値の最大化』が提案されているが、本論文では加法モデルに対する2種類の原型定式化を提案し、それが同一の加法モデル定式化に帰着することを説明する。さらに、本原型定式化に基づく離散評点計算と加法モデルLP定式化の計算結果の比較、相対効率値関数が双直角曲線となることに基づく幾何学的考察、p乗データ変換を適用時の考察、についても概説する。

2. 加法モデルの原型定式化 (その1)

DMU_j の絶対効率値 A_j と DMU_k の相対効率値 R_k を以下で定義する。

$$A_j(u, v) = y_j^T u - x_j^T v \quad (1)$$

$$R_k(u, v) = \frac{A_k - \min\{A_j\}}{\max\{A_j\} - \min\{A_j\}} \quad (2)$$

ここで、 A_j は出力の入力に対する比率ではなく差分として、 R_k は $[0, 1]$ の値をとる「 A_j 最大値- A_j 最小値」に対する相対比率として定義される。

(2)において、 $s = -\min\{A_j\}$ (3) と置くと、(4)を

$$\text{得る。} \quad R_k(u, v) = \frac{A_k + s}{\max\{A_j\} + s} \quad (4)$$

u, v の定義域を U, V として、(4)を u, v, s を変数とした以下の最大化問題を考える。

$$[\text{定式化I}] \quad Z_1 = R_k(u, v, s) \rightarrow \max \quad (5)$$

$$u \in U, v \in V, s: \text{自由} \quad (6)$$

但し変数 s は本来は(3)で定義されるが、より一般化して基準値として考え、正も負もとりうる自由変数として導入する。

(4)の R_k の分母を K と固定し、 R_k の分子を最大化すると、次の定式化IIを得る。

$$[\text{定式化II}] \quad Z_2 = y_k^T u - x_k^T v + s \rightarrow \max \quad (7)$$

$$\max\{A_j\} + s = K \quad (8) \quad u \in U, v \in V \quad (9)$$

$s_k = s - K$ (10) と置き、(7)の最大化の下で、(8)は不等式に変換できるので、次の定式化IIIを得る。

$$[\text{定式化III}] \quad Z_3 = y_k^T u - x_k^T v + s_k \rightarrow \max \quad (11)$$

$$y_j^T u - x_j^T v + s_k \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (12)$$

$$u \in U, v \in V, s_k: \text{自由} \quad (13)$$

(13)において、 $u \geq 1, v \geq 1$ とすれば、定式化IIIは文献[2]のCharnes-Cooper-Golany-Seiford-Stutz (1985) による加法モデルに一致する。定式化IIIでは目的関数 Z_3 が $(-\infty, 0]$ の範囲をとり、 $Z_3=0$ で最大値が達成される。一方、(2)の R_k は $[0, 1]$ の範囲をとり、 $R_k=1$ が最大値である。これは(3)の定義式を一般化した基準値として導入したからである。

3. 加法モデルの原型定式化 (その2)

比率モデルの原型定式化では(14)の相対効率値を目的関数として最大化したが、これを形式的に対数変換 $y = \log x$ した目的関数 Z_4 を考えよう。

$$(y_k^T u / x_k^T v) / \max\{y_j^T u / x_j^T v\} \quad (14)$$

$$Z_4 = y_k^T u - x_k^T v - \max\{y_j^T u - x_j^T v\} \quad (15)$$

$$(15) \text{において、} t = -\max\{y_j^T u - x_j^T v\} \quad (16) \text{ と置く}$$

と、(17)を得る。

$$Z_4 = y_k^T u - x_k^T v + t \rightarrow \max \quad (17)$$

$$\max\{y_j^T u - x_j^T v\} = -t \quad (18)$$

(18)は(17)の最大化の下で不等式に変換できるので、 $t = t_k$ とし、次の定式化を得る。

$$[\text{定式化IV}] \quad Z_4 = y_k^T u - x_k^T v + t_k \rightarrow \max \quad (19)$$

$$y_j^T u - x_j^T v + t_k \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (20)$$

$$u \in U, v \in V, t_k : \text{自由} \quad (21)$$

比率型目的関数(14)は $[0, 1]$ の範囲をとり、これを対数変換すれば、 $[\log 0, \log 1] \rightarrow [-\infty, 0]$ となり、(19)の Z_4 のとりうる範囲となる。定式化IVは定式IIIで s_k を t_k と見直せば両者は同じ定式化となる。

又、(10)に(8)を代入すると、(22)を得る。

$$s_k = -\max\{A_j\} \quad (22)$$

すなわち、 $s_k = t_k$ (23) が成立し、2通りの導出方法にもとづく定式化IIIと定式化IVは全く同じ定式化と言える。

4. 変数 (u, v) の変動域

比率モデルにおいては、ノンネガティブ評価では(24)、ポジティブ評価では(25)の変動域を用いる。

$$U = \{u \in R^S | u \geq 0\}, V = \{v \in R^m | v \geq 0\} \quad (24)$$

$$U = \{u \in R^S | u \geq \varepsilon 1\}, V = \{v \in R^m | v \geq \varepsilon 1\} \quad (25)$$

一方、加法モデルについては、0と ε を対数変換(底は任意)すると、 $\log 0 \rightarrow -\infty$ 、と $\log \varepsilon$ となるので、ノンネガティブ評価では u, v は自由変数、ポジティブ評価では(26)となる。

$$U = \{u \in R^S | u \geq \log \varepsilon 1\}, V = \{v \in R^m | v \geq \log \varepsilon 1\} \quad (26)$$

底は任意なので、 ε とすれば、(27)を得る。

$$U = \{u \in R^S | u \geq 1\}, V = \{v \in R^m | v \geq 1\} \quad (27)$$

なお(25)の比率モデル・ポジティブ評価において、入力項目、出力項目毎に無限小正数 ε が異なる場合には変動域は(28)に帰着する。

$$U = \{u \in R^S | u \geq \varepsilon_Y\}, V = \{v \in R^m | v \geq \varepsilon_X\} \quad (28)$$

$$\varepsilon_Y = \{\varepsilon_{Yr}\}, \varepsilon_X = \{\varepsilon_{Xi}\} \quad (29)$$

(29)の各右辺各要素の対数を取り、各左辺ベクトルを新ら

たに w_X, w_Y とすると、項目毎に ε が異なる場合の加法モデルの変動域として(31)を得る。

$$w_X = \{\log \varepsilon_{Xi}\} = \{w_{Xi}\}, \quad w_Y = \{\log \varepsilon_{Yr}\} = \{w_{Yr}\} \quad (30)$$

$$U = \{u \in R^S | u \geq w_Y\}, V = \{v \in R^m | v \geq w_X\} \quad (31)$$

5. 双対問題

定式化IIIあるいはIVにおいて、 U, V として(31)を採用時の定式化を主問題 $\text{ADD}_p(k)$ 「DMU kの最適化問題」として以下に示す。

$$[\text{主問題}] \quad z = y_k^T u - x_k^T v + t_k \rightarrow \max \quad (32)$$

$$y_j^T u - x_j^T v + t_k \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (33)$$

$$u \geq w_Y, v \geq w_X \quad (34)$$

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ を各々サイズ

$m \times n, s \times n$ の入力、出力データ行列とすると、(32) ~ (3

4)は以下の主・双対形式として整理できる。

$$y_k^T u - x_k^T v + t_k = z \rightarrow \max \quad (35)$$

双対変数

$$Y^T u - X^T v + t_k \leq 0 \cdots \lambda \quad (36)$$

$$-u \leq -w_Y \cdots s_Y \quad (37)$$

$$-v \leq -w_X \cdots s_X \quad (38)$$

よって、 $\text{ADD}_p(k)$ に対して以下の双対問題 $\text{ADD}_d(k)$ を得る。

$$[\text{双対問題}] \quad w_1 = -w_X^T s_X - w_Y^T s_Y \rightarrow \min \quad (39)$$

$$1^T \lambda = 1 \quad (40) \quad X\lambda + s_X = x_k \quad (41)$$

$$Y\lambda - s_Y = y_k \quad (42) \quad s_X \geq 0, s_Y \geq 0, \lambda \geq 0 \quad (43)$$

目的関数 w_1 の最小化は $w = -w_1$ の最大化(44)となる。

$$w = w_X^T s_X + w_Y^T s_Y \rightarrow \max \quad (44)$$

又、(27)により $w_X = 1, w_Y = 1$ (45)とすれば、基本的なスラック和最大化の加法モデルの目的関数(46)を得る。

$$w = 1^T s_X + 1^T s_Y \rightarrow \max \quad (46)$$

6. 考察

(6. 1) 直角双曲線の幾何学的構造

原型定式化(その1)の(2)式においては、差分効率値 A_j (ex、

利益)の最大-最小区間に対する比率として相対効率値 R_k を定義した(ここで、 A_j について差分効率(?)としたのは、率という文字が比率を連想するので、別の用語、例えば、差分効果値、あるいは差分利益値とでもすべきかもしれない)。

ここで、 R_k は比率であり、 $[0, 1]$ の値域を持つ。次に(3)式の $s = -\min\{A_j\}$ には制約されず、 s を自由変数として考え、

(4)式を変形すると、(47)を得る。

$$R_k(u, v, s) = 1 - \frac{\max\{A_j(u, v)\} - A_k(u, v)}{s + \max\{A_j(u, v)\}} \quad (47)$$

ここで、(47)式右辺第2項の分子は非負数なので、 R_k 最大化の下では、分母項に負制約(48)が課される。

$$s + \max\{A_j(u, v)\} < 0 \quad (48)$$

ここで、 u, v を一時的に固定し、変数 s の関数として(4)式 $R=R_k$ は、以下に示すように直角双曲線となる。

$$R = \frac{s+a}{s+b} = 1 - \frac{b-a}{s+b} = 1 + \frac{a-b}{s+b} \quad (49)$$

但し、 $a = A_k, b = \max A_j, a-b \leq 0$, すなわち、 $s \geq -a$

の範囲では $0 \leq R \leq 1$ となる。例えば、 $s=0$ では

$$R = a/b = A_k / \max A_j, s = -c (= -\min A_j) \text{では、}$$

$$R = (a-c)/(b-c) = (A_k - \min A_j) / (\max A_j - \min A_j)$$

と原型定式化(その1)の定義式(1)、(2)に沿ったデータを示す。

一方、(48)式の範囲「 $s+b < 0$ 」では、直角双曲線で $R \geq 1$ となる。従って、 R の最大化は(49)式の最右辺項に注目すると、分母 $s+b$ を $s+b < 0$ の条件下で最小化し(すなわち $s \rightarrow -b$ s.t. $s+b < 0$)、同時に分子「 $a-b$ 」を最大化することにより達成される。

$$R-1 = \frac{a-b}{s+b} \quad (50)$$

(50)において、 $s \rightarrow -b(s \rightarrow -\max A_j(u, v))$ の下での分子 $z = z = a-b = A_k(u, v) - \max A_j(u, v) \rightarrow$ 最大化は、原型定式化(その1)、(その2)の定式化II、III、IVでの目的関

数 z_2, z_3, z_4 の最大化と同じである。すなわち、定式化II、III、IVでは $s+b < 0$ の範囲($R \geq 1$)で議論をしている。

従って、(51)より $z = a-b$ は $[-\infty, 0]$ の範囲の値をとり、 $z \rightarrow 0$ で最大値が達成される。

$$z = a-b = (R-1) \times (s+b) \quad (51)$$

(但し、 $R-1 \geq 0, s+b < 0$)

(6. 2) 無限小正数 ε と対数変換と対数の底

項目毎に ε が異なるポジティブ評価の比率モデルにおいて、

(30)での対数の底として $\varepsilon_{xi}, \varepsilon_{yr}$ 中の最小値 $\varepsilon_{\min}$ を選べば、 $w_x \geq 1, w_y \geq 1$ (52)が成立し、最大値 $\varepsilon_{\max}$ を選べば、 $w_x \leq 1, w_y \leq 1$ (53)が成立する。最小値でも最大値でもない中間の値 ε_{mid} を選べば、 w_x, w_y の各要素は1以上あるいは1未満の正值をとる。いずれの場合にも、ポジティブ評価比率モデルの項目評価変数値の下限值である ε の対数 $w = \log \varepsilon$ が加法モデルにおいてその項目スラックの正值重み w となる。但し、以上の議論は、すべての項目別 ε が1以上でかつ対数の底も1より大きな値の場合である。 ε は無限小正数なので、すべての ε が1未満と考える方が合理的であろう。この場合は、最小値 $\varepsilon_{\min}$ を対数の底として選べば(53)が、最大値 $\varepsilon_{\max}$ を選べば(52)が成立する。すなわち、すべての ε が1より大ならば、1より大きい値を底とすれば、すべての重み w は正值をとるが、もし1より小さな値を底とすれば、すべての重み w は負値をとる。

同様に、すべての ε が1未満でも、1より大きい値を底、例えば、 $\varepsilon_1=0.1, \varepsilon_2=0.01, \varepsilon_3=0. \varepsilon_4=0.001$, で、10を底とした対数をとると、 $w_1=-1, w_2=-2, w_3=-3$, となり、重み付きスラック和最大化モデル(44)は実質的には重み付きスラック和最小化となる。同様に、単純な(重み無しの)スラック和最大化(46)も、 $\varepsilon \ll 1$ とし、1より大きい底、例えば、10をとれば $w = \log \varepsilon < 0$ となり、実質的にはスラック和最小化となる。すなわち、(46)のスラック和最大化の(標準的な)加法モデルでは、無限小正数 ε を底とした場合であり、1より大きい底を想定すると、新たなスラック和最適化目的関数を持つ加法モデルが考えられる。

(6. 3) 加法モデルの零和ゲーム定式化

(15)に基づき DMU_k の効率値 z_k 最大化のDEA加法モデルのゲーム定式化を以下に考察する。

(15)を整理して、(54)を得る。

$$\begin{aligned} z_k &= y_k^T u - x_k^T v - \max_j \{y_j^T u - x_j^T v\} \\ &= -\max_j \{(y_j - y_k)^T u - (x_j - x_k)^T v\} \quad (54) \\ &= \min_j \{(y_k - y_j)^T u - (x_k - x_j)^T v\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_k &= X - \{x_k \dots x_k\} = \{x_{ij} - x_{ik}\}, \\ Y_k &= Y - \{y_k \dots y_k\} = \{y_{rj} - y_{rk}\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

と定義し (u, v) を確率ベクトルとして、(5.4) の Z_4 の最大化は、利得行列 A (5.6) の最大化・行プレイヤーの定式化 (5.7) ～ (5.9) となる。

$$A = \begin{bmatrix} Y_k \\ -X_k \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$z \rightarrow \max \quad (5.7)$$

$$A^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq z \mathbf{1} \quad (5.8)$$

$$u^T \mathbf{1} + v^T \mathbf{1} = 1, u \geq 0, v \geq 0 \quad (5.9)$$

$$\mu = u/z, v = v/z \quad (60) \text{ と変数変換すれば、} \quad (6.1)$$

～ (6.3) となる。

$$\mu^T \mathbf{1} + v^T \mathbf{1} \rightarrow \min \quad (6.1)$$

$$A^T \begin{bmatrix} \mu \\ v \end{bmatrix} \geq \mathbf{1} \quad (6.2)$$

$$\mu \geq 0, v \geq 0 \quad (6.3)$$

双対問題である最小化・列プレイヤーの定式化は (6.4) ～ (6.6) となる。

$$w \rightarrow \min \quad (6.4)$$

$$A\lambda \leq w \mathbf{1} \quad (6.5)$$

$$\lambda^T \mathbf{1} = 1, \lambda \geq 0 \quad (6.6)$$

$q = \lambda/w$ (6.7) と変数変換すれば、(6.8) ～ (7.0) となる。

$$q^T \mathbf{1} \rightarrow \max \quad (6.8)$$

$$Aq \leq \mathbf{1} \quad (6.9)$$

$$q \geq 0 \quad (7.0)$$

6. おわりに

2つの考え方にもとづく加法モデルの原型定式化を提案し、これが既存のC-C-G-S-S (1985) 文献[2]に一致することを示した。又、双対問題に相当する加法モデルの重み付きスラック和最大化モデルの重みは、対応する比率モデルでの無限

小正数 ϵ と対数変換時の底の値に依存している関連性を示し、新たなスラック和最適化目的関数を持つ加法モデルの可能性 (例えば上田のadd-minモデル)、を考察した。さらに、本原型定式化に基づく離散評点計算と加法モデルLP定式化の計算結果の比較、相対効率値関数が直角双曲線となることに基づく幾何学的考察、p乗データ変換を適用時の考察、については、文献[1]の第3, 4, 5章を参照してください。

文献[1]の第3章「離散評点計算」では、提案した原型定式化にもとづき、エクセル表計算を使用した離散評点計算法を提案する。公開されている1入力1出力データ例を通して、提案する離散評点計算法の結果と通常のLP計算結果を比較すると以下の点等が判明した。(i) 両計算結果は、離散化誤差の範囲で一致する、(ii) 離散評点計算法では対応する比率尺度も計算できる。

文献[1]の第4章「幾何学的考察」では、差分比率 r が基準値 s の関数として直角双曲線となることに基づく、その幾何学的構造を考察した。具体的には、 $a=A_k, b=\max A_j, c=\min A_j$ とすれば、差分比率 r は基準値 s の関数式(71)で以下に定義できる。

$$r = 1 + \frac{a-b}{s+b} \quad (71) \quad (r-1)(s+b) = -(b-a) \quad (72) \quad R \cdot S = -1 \quad (73)$$

$$R = (r-1)/(b-a)^{\frac{1}{2}} \quad (74) \quad S = (s+b)/(b-a)^{\frac{1}{2}} \quad (75)$$

$$r = (b-a)^{\frac{1}{2}} R + 1 \quad (76) \quad s = (b-a)^{\frac{1}{2}} S - b \quad (77)$$

(73)の直角双曲線(反比例式)は、原点 $O(0,0)$ に対する点対称性と、「 $R=S$ 」軸に対する線対称性Ⅰ、「 $R=-S$ 」軸に対する線対称性Ⅱを持っている。

文献[1]の第5章「p乗データ変換」では、CCRモデルで見られた『 $p \rightarrow \infty$ でのFree Disposal Hullモデルへの漸近特性』が加法モデルでも観察されるかを、1入力1出力データ例の計算結果(離散評点計算とLP計算)をもとに検証した。

参考文献

- [1] 篠原正明、篠原健：DEA加法モデル、情報システム研究所報告、ISRC2013-1(2013.12).
- [2] Charnes A., W.W. Cooper, B. Golany, L.M. Seiford and J. Stutz :Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions. Journal of Econometrics 30(1/2), 91-107(1985).