

不完全情報下の幾何平均 DAP 収束解=LLS 解

日大生産工 (院) ○新田 翔平

日大生産工 篠原 正明

1. はじめに

動的平均化プロセス DAP(Dynamic Averaging Process) は、AHP などにおいて、項目間の一対比較情報から、項目間の相互比較と平均化により、項目重要度が定まってくる過程を数理モデルとして定式化したものである。

本論では、不完全情報下において幾何平均操作を行い、重要度の値が対数最小二乗解 (LLS) に収束するかの実験および考察をする。具体的には、LLS トポロジー公式が幾何平均 DAP と一致するかを検証する。

2. 不完全情報下の幾何平均 DAP の例

不完全情報の幾何平均 DAP の例として、 $N=5$ の一対比較行列 A を式(1)に、デザイングラフを図 1 に示す。

	a_{11}		a_{13}	a_{14}	a_{15}
		a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
$A=$	a_{31}	a_{32}	a_{33}		a_{35}
	a_{41}	a_{42}		a_{44}	a_{45}
	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

(1)

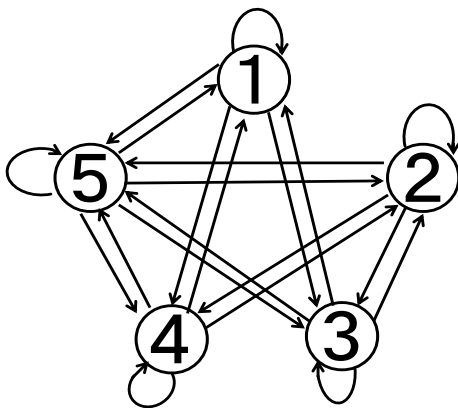


図 1. 式(1)の一対比較デザイングラフ

この場合の DAP の更新式は(2)~(6)に与えられる。

$$x_1(t+1) = \text{geomean}(a_{11}x_1(t), a_{13}x_3(t), a_{14}x_4(t), a_{15}x_5(t)) \quad (2)$$

$$x_2(t+1) = \text{geomean}(a_{22}x_2(t), a_{23}x_3(t), a_{24}x_4(t), a_{25}x_5(t)) \quad (3)$$

$$x_3(t+1) = \text{geomean}(a_{31}x_1(t), a_{32}x_2(t), a_{33}x_3(t), a_{35}x_5(t)) \quad (4)$$

$$x_4(t+1) = \text{geomean}(a_{41}x_1(t), a_{42}x_2(t), a_{44}x_4(t), a_{45}x_5(t)) \quad (5)$$

$$x_5(t+1) = \text{geomean}(a_{51}x_1(t), a_{52}x_2(t), a_{53}x_3(t), a_{54}x_4(t), a_{55}x_5(t)) \quad (6)$$

例えば、項目 1 については、 t 時点での幾何平均により $t+1$ 時点での重要度 $x_1(t+1)$ を更新し、具体的には(6)で表現できる。同様に (2)~(5)も、 $t+1$ 時点での重要度の更新は(7)~(10)で表される。

$$x_1(t+1) = (a_{11}x_1(t) \times a_{13}x_3(t) \times a_{14}x_4(t) \times a_{15}x_5(t))^{1/4} \quad (7)$$

$$x_2(t+1) = (a_{22}x_2(t) \times a_{23}x_3(t) \times a_{24}x_4(t) \times a_{25}x_5(t))^{1/4} \quad (8)$$

$$x_3(t+1) = (a_{31}x_1(t) \times a_{32}x_2(t) \times a_{33}x_3(t) \times a_{35}x_5(t))^{1/4} \quad (9)$$

$$x_4(t+1) = (a_{41}x_1(t) \times a_{42}x_2(t) \times a_{44}x_4(t) \times a_{45}x_5(t))^{1/4} \quad (10)$$

$$x_5(t+1) = (a_{51}x_1(t) \times a_{52}x_2(t) \times a_{53}x_3(t) \times a_{54}x_4(t) \times a_{55}x_5(t))^{1/5} \quad (11)$$

なお、図 1 のデータに対する LLS 解のトポロジー公式は以下の通りである。

$$x_1 = (a_{11} \times A_{12} \times a_{13} \times a_{14} \times a_{15})^{1/5} \quad (12)$$

$$x_2 = (A_{21} \times a_{22} \times a_{23} \times a_{24} \times a_{25})^{1/5} \quad (13)$$

$$x_3 = (a_{31} \times a_{32} \times a_{33} \times A_{34} \times a_{35})^{1/5} \quad (14)$$

$$x_4 = (a_{41} \times a_{42} \times A_{43} \times a_{44} \times a_{45})^{1/5} \quad (15)$$

$$x_5 = (a_{51} \times a_{52} \times a_{53} \times a_{54} \times a_{55})^{1/5} \quad (16)$$

但し、 $A_{12}, A_{21}, A_{34}, A_{43}$ は欠落枝に対する仮想一対比較であり、以下で与えられる。

$$A_{12} = (a_{13} \times a_{32})^{1/3} (a_{14} \times a_{42})^{1/3} (a_{15} \times a_{52})^{1/3} \quad (17)$$

$$A_{21} = (a_{23} \times a_{31})^{1/3} (a_{24} \times a_{41})^{1/3} (a_{25} \times a_{51})^{1/3} \quad (18)$$

$$A_{34} = (a_{31} \times a_{14})^{1/3} (a_{32} \times a_{24})^{1/3} (a_{35} \times a_{54})^{1/3} \quad (19)$$

$$A_{43} = (a_{41} \times a_{13})^{1/3} (a_{42} \times a_{23})^{1/3} (a_{45} \times a_{53})^{1/3} \quad (20)$$

Geometric Mean DAP Converges to An LLS(Logarithmic Least Squares) Solution
for Incomplete Information Case

Shohei NITTA and Masaaki SHINOHARA

3. 計算例

以下に、完全情報・不完全情報・ループ状グラフの場合についてDAP特性を計算する。また、黒い項目は欠落要素とする。

3.1 完全情報の場合(整合行列)

	1	2	3	4	5
	0.5	1	1.5	2	2.5
A=	0.33333	0.66666	1	1.3333	1.6666
	0.25	0.5	0.75	1	1.25
	0.2	0.4	0.6	0.8	1

生データ	2.687238
	1.343619
	0.895731
	0.671812
	0.537448
正規化データ	0.437957
	0.218979
	0.145983
	0.10949
	0.087591

3.2 不完全情報の場合(図1あるいは(1)式)

(i)整合性かつ逆比性ありの例

	1		3	4	5
		1	1.5	2	2.5
A=	0.33333	0.66666	1		1.6666
	0.25	0.5		1	1.25
	0.2	0.4	0.6	0.8	1

	幾何平均	LLS解
生データ	2.687238	2.605169
	1.343619	1.302586
	0.895731	0.868376
	0.671812	0.651295
	0.537448	0.521034
正規化データ	0.437957	0.437957
	0.218979	0.218979
	0.145983	0.145983
	0.10949	0.10949
	0.087591	0.087591

(ii)整合性なし、逆比性ありの場合

	1		3	4	10
		1	1.5	2	2.5
A=	0.33333	0.66666	1		1.6666
	0.25	0.5		1	1.25
	0.1	0.4	0.6	0.8	1

	幾何平均	LLS解
生データ	3.254226	3.134084
	1.291441	1.243764
	0.901664	0.868376
	0.676262	0.651295
	0.470974	0.453587
正規化データ	0.493471	0.493471
	0.195834	0.195834
	0.136728	0.136728
	0.102548	0.102548
	0.071419	0.071419

(iii)整合性かつ逆比性なしの場合

	1		3	4	10
		1	1.5	2	2.5
A=	0.33333	0.66666	1		1.6666
	0.25	0.5		1	1.25
	1	0.4	0.6	0.8	1

	幾何平均	LLS解
生データ	9.792775	3.134084
	3.886266	1.243764
	2.713331	0.868376
	2.035039	0.651295
	2.197513	0.718886
正規化データ	0.474803	0.473684
	0.188426	0.187982
	0.131556	0.131246
	0.098669	0.098436
	0.106546	0.108652

3.3 不完全情報(非対欠落)の場合

(i)整合性かつ逆比性ありの例

	1		3	4	5
		1	1.5	2	2.5
A=	0.3333	0.6666	1	1.3333	
	0.25	0.5		1	1.25
	0.2	0.4	0.6	0.8	1

	幾何平均	LLS解
生データ	2.659821	2.605154
	1.329911	1.302594
	0.886557	0.868338
	0.664965	0.622875
	0.531965	0.521034
正規化データ	0.437959	0.44006
	0.21898	0.220033
	0.145978	0.146679
	0.109491	0.105215
	0.087592	0.088013

(ii)整合性なし、逆比性ありの例

	1		3	4	10
		1	1.5	2	2.5
A=	0.3333	0.6666	1	1.3333	
	0.25	0.5		1	1.25
	0.1	0.4	0.6	0.8	1

	幾何平均	LLS解
生データ	3.41524	3.134065
	1.355339	1.243771
	0.979914	0.909406
	0.703552	0.594747
	0.493661	0.453587
正規化データ	0.491564	0.494677
	0.195077	0.196315
	0.141041	0.14354
	0.101264	0.093874
	0.071054	0.071594

(iii)整合性かつ逆比性なしの例

	1		3	4	10
		1	1.5	2	2.5
A=	0.3333	0.6666	1	1.3333	
	0.25	0.5		1	1.25
	1	0.4	0.6	0.8	1

	幾何平均	LLS解
生データ	8.533107	3.134065
	3.386367	1.243771
	2.191925	0.909406
	1.807149	0.594747
	1.920027	0.718886
正規化データ	0.478351	0.474795
	0.189834	0.188425
	0.122876	0.13777
	0.101306	0.090101
	0.107633	0.108908

3.4 ループ状グラフの不完全情報の場合(図2)

(i)整合性かつ逆比性ありの例

		2			5
	0.5		1.5		
A=		0.6666		1.3333	
			0.75		1.25
	0.2			0.8	

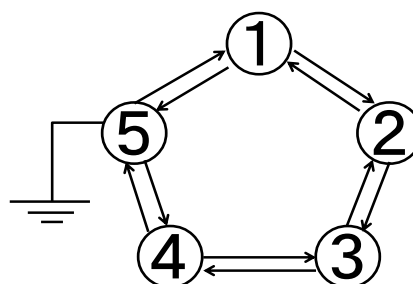


図2：ループ状のデザイングラフ

図2のデザイングラフに対するトポロジー公式を以下に示す。

[公式1] 項目5を基準とした場合

$$x_1 = (a_{15})^{4/5} \times (a_{12}a_{23}a_{34}a_{45})^{1/5} \quad (21)$$

$$x_2 = (a_{21}a_{15})^{3/5} \times (a_{23}a_{34}a_{45})^{2/5} \quad (22)$$

$$x_3 = (a_{32}a_{21}a_{15})^{2/5} \times (a_{34}a_{45})^{3/5} \quad (23)$$

$$x_4 = (a_{43}a_{32}a_{21}a_{15})^{1/5} \times (a_{45})^{4/5} \quad (24)$$

$$x_5 = 1 \quad (25)$$

[公式2] 仮想一対比較値を用いる場合

$$x_1 = a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15} \quad (26)$$

$$x_2 = a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25} \quad (27)$$

$$x_3 = a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35} \quad (28)$$

$$x_4 = a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45} \quad (29)$$

$$x_5 = a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55} \quad (30)$$

但し、

$$A_{13} = (a_{12}a_{23})^{3/5} (a_{15}a_{54}a_{43})^{2/5} \quad (31)$$

$$A_{14} = (a_{12}a_{23}a_{34})^{2/5} (a_{15}a_{54})^{3/5} \quad (32)$$

$$A_{24} = (a_{23}a_{34})^{3/5} (a_{21}a_{15}a_{54})^{2/5} \quad (33)$$

...以下省略

	幾何平均	トポロジー
生データ	2.60351	4.999975
	1.302184	2.499975
	0.867942	1.666575
	0.650925	1.249975
	0.520918	1
正規化データ	0.437897	0.43796
	0.219021	0.218979
	0.145983	0.14598
	0.109482	0.109488
	0.087616	0.087593

(ii)整合性なし、逆比性ありの例

		2			10
	0.5		1.5		
A=		0.6666		1.3333	
			0.75		1.25
	0.1			0.8	

	幾何平均	トポロジー
生データ	3.435121	8.705462
	1.495879	3.789254
	0.867942	2.199059
	0.56664	1.435844
	0.394809	1
正規化データ	0.508125	0.508211
	0.221271	0.221211
	0.128386	0.128378
	0.083818	0.083822
	0.0584	0.058378

(iii)整合性かつ逆比性なしの例

		2			10
	0.5		1.5		
A=		0.6666		1.3333	
			0.75		1.25
	1			0.8	

	幾何平均	トポロジー
生データ	13676.83	8.705462
	3757.335	3.789254
	2180.088	2.199059
	2256.059	1.435844
	3947.6	1
正規化データ	0.529742	0.508211
	0.145532	0.221211
	0.084441	0.128378
	0.087383	0.083822
	0.152902	0.058378

4. 考察

(7)~(10)の両辺を4乗し、(11)を5乗し、両辺の相乗をとると、(34)を得る。

$$\begin{aligned}
 & x_1(t+1)^4 \cdot x_2(t+1)^4 \cdot x_3(t+1)^4 \cdot x_4(t+1)^4 \cdot x_5(t+1)^5 \\
 & = (a_{11}a_{13}a_{14}a_{15}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{31}a_{32}a_{33}a_{35}a_{41}a_{42}a_{44}a_{45} \\
 & a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}) \times (x_1(t)^4 \cdot x_2(t)^4 \cdot x_3(t)^4 \cdot x_4(t)^4 \cdot x_5(t)^5) \\
 & = \Pi(A) \times (x_1(t)^4 \cdot x_2(t)^4 \cdot x_3(t)^4 \cdot x_4(t)^4 \cdot x_5(t)^5) \quad (34)
 \end{aligned}$$

(33)の右辺第1項を総積 $\Pi(A)$ とすると、もし、 $\Pi=1$ ならば、(35)が成立し、(36)が成立することが期待できる。

$$\begin{aligned}
 & x_1(t+1)^4 \cdot x_2(t+1)^4 \cdot x_3(t+1)^4 \cdot x_4(t+1)^4 \cdot x_5(t+1)^5 \\
 & = x_1(t)^4 \cdot x_2(t)^4 \cdot x_3(t)^4 \cdot x_4(t)^4 \cdot x_5(t)^5 \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$x_i(t+1) = x_i(t), i=1, \dots, 5 \quad (36)$$

すなわち、一定値定常性が成立する。一般に、(36)が成立すれば、幾何平均 DAP 収束解条件式と LLS 解の方程式([1],[2],[3])が一致するので、表題「不完全情報下の幾何平均 DAP 収束値=LLS 解」が成立する。

5. おわりに

一定の条件(逆比性あり及び対欠落)を満たした場合に、不完全情報下の幾何平均 DAP 収束解はトポロジー公式に基づく LLS 解に一致することを数値計算上で確認した。今後は、条件を満足しない状況下の問題について、直接 LLS 解逆比性違反を考慮したトポロジー公式などと比較する。

参考文献

- [1]篠原正明, 篠原健: AHP 不完全一対比較情報の対数最小二乗法解のトポロジー公式, 平成 19 年度 日本大学生産工学部第 40 回学術講演会 数理情報部会公演概要, pp67-71(2007.12).
- [2]茂木渉, 篠原正明: 不完全情報一対比較行列に対する未知ウェイト代入法と Harker 法・対数最小二乗法との関係, 平成 23 年度 日本大学生産工学部 第 44 回学術講演会 数理情報部会公演概要, pp.1103-1106(2011.12).
- [3]篠原正明, 茂木渉: 不完全 LLS 解の幾何平均公式とトポロジー公式, 平成 24 年度 日本大学生産工学部 第 45 回学術講演会 数理情報部会公演概要, (2012.12).