

AHP 比較行列の固有ベクトルについて

日大生産工

情報システム研究所

○篠原 正明

篠原 健

1. はじめに

項目ウェイトを導出する方法として、「比較行列Aの右固有ベクトル」を採用することをAHP/ANPの提唱者Saaty博士は強く推奨している。動的平均化プロセス(DAP)の提案([1])は「Saaty博士の固有ベクトル法」の妥当性を裏付けるものであり、本論文においては、[1]の算術平均DAPを算術平均以外の様々なDAPへと拡張・一般化する研究、その関連研究について現時点での研究経過・成果の概要(the state of the art)を述べる(詳細は[2]の4章を参照)。

以下、2章は「MAX-DAPの周期性」、3章は「不完全情報下の幾何平均DAP=LLS解」、4章は「通常代数以外での固有値・ベクトル」、5章は「所与の固有値・ベクトルを持つ行列の構成法」、について説明する。

2. MAX-DAPの周期性

[3]のMAX-DAPにおいて、項目数 n のMAX-DAP特性は周期的振動特性を持ち、 $n \leq 4$ の場合には、「周期は常に n 以下で、 $n+1$ 以上にはならない」ことを数値計算実験により確認した。そこで、次の疑問が生じる： $n > 4$ (あるいは ≥ 5)では、「 $n+1$ 以上の周期の非存在性」は成立するであろうか？

答は、 $n > 4$ では、「 $n+1$ 以上の周期は存在する！」であり、 $n \leq 4$ とは異なる結果となる。

以下に、 $n=5$ で周期長=6の例を示す。

比較行列Aを(2.1)、対応する一対比較グラフを図1、MAX-DAP特性を図2に示す。

A =	1	8	1	1	1
	2	1	1	1	1
	1	1	1	4	1
	1	1	1	1	2
	1	1	8	1	1

(2.1)

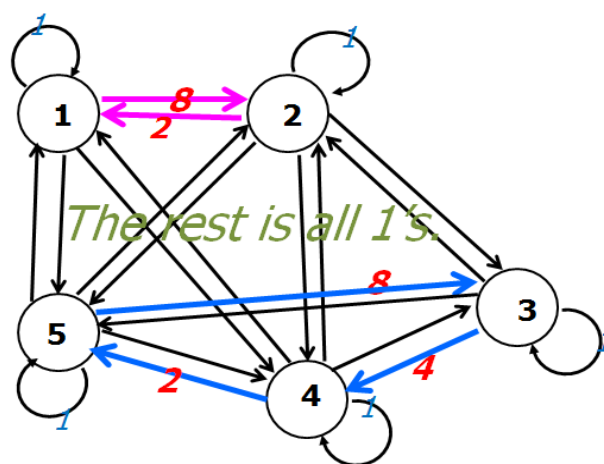


図1: 一対比較グラフ

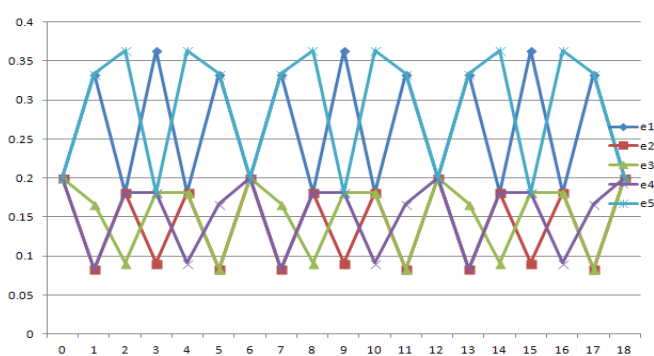


図2: 項目数 $n=5$ で周期長=6のMAX-DAP特性

本例では、有効閉路ELが閉路長 $m_1=2$ の閉路 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ と閉路長 $m_2=3$ の閉路 $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ の2つの分離閉路により構成され、両閉路において $LPL=4$, Length per Link on P(max, $\times$)となる[ケース3]。従って、 $m_1 \times m_2 = 2 \times 3 = 6$ の周期長を持つ。ところが、 $n \leq 4$ では、 $m_1 \times m_2 > n$ を満たす2つのEL分離閉路が存在しないため、[3]のMAX-DAP数値計算実験結果が理論的に裏付けられた。

MAX-DAPの周期性を分析するために以下に、許容リンク数 k が与えられた時の一般最長路問題の (i, j) 間の最長路値 $P_{ij}(k)$ の周期的振動特性を考察する。ところで、一般最長路問題とは、有向グラフ G において正値閉路長閉路(略して正閉路)が

存在する場合の単純路 (simple path) に限定されない最長路問題であり、リンク数に制約がなければ正閉路を無限に巡回することにより、最長路値は無限に増大する。最短路問題においてもリンク数に制約がなければ、負閉路が存在すると、負閉路を巡回することにより最短路値は無限に減少するのと同じである。

(i, j)間のkリンク最長路値LP(k)に注目すると(添字(i, j)は省略)、十分大きなリンク数k(例えば $k \geq n$)では、ある特定の正閉路を巡回することにより最長路値が達成されると想定されるので、(2. 2), (2. 3)が成立する。

$$LP(k+m) = LP(k) + EL(m) \quad \text{on } P(\max, +) \quad (2. 2)$$

$$LP(k+m) = LP(k) \times EL(m) \quad \text{on } P(\max, \times) \quad (2. 3)$$

但し、EL(m)はリンク長mの有効閉路長(Efficient Loop length)であり、EL(有効閉路、Efficient Loop)は点数nの有向グラフGにおいて、単純閉路に限定されず、自己閉路を含む、すべての閉路の中でその閉路長LLをそのリンク長qで割った値(リンク当りの閉路長、LPL、Length per Link on P(max, +))が最大となる閉路である。

リンク長qの最長閉路長(Longest Loop Length)をLLL(q)とすると、m, EL(m)は(2. 4), (2. 5)で与えられる(但し、(2. 4)でのmaxは $q=1, 2, \dots, n$ に関して)。

$$m = \arg \max LLL(q)/q \quad (2. 4) \quad EL(m) = LLL(m) \quad (2. 5)$$

以下に、個別のケース毎に(2. 2), (2. 3)の周期性を検討する。

[ケース1]効率的閉路ELが単一の単純閉路SLにより構成され、 $i \in EL$ かつ $j \in EL$ の場合。

ELのリンク長をmとしよう。LP(1)は $i \rightarrow j$ の1リンク直通路の重み(リンク長)であり、有効グラフGは完全グラフに限定されないもので、直通リンクが存在しない場合は、(2. 2)では $LP(1) = -\infty$ 、(2. 3)では $LP(1) = 0$ となる。LP(2)は2リンク路、 $\dots$ 、LP(m)はmリンク路の最長路値であり、ELの部分を含みうる。LP(m+1)は $\max\{LP(1) + EL(m), LP(m) + 0\}$ 、より一般的には、LP(m+r) ($r=1, \dots, m$)については、 $EL(m) + LP(r)$ ($r=1, \dots, m$)あるいは $LP(m+r-1)$ の最大値となる。

$$LP(m+r) = \max\{EL(m) + LP(r), LP(m+r-1)\} \quad (r=1, \dots, m) \quad (2. 6)$$

(2. 6)右辺の第1項は「ELを $i \rightarrow i$ と1周し、その後 $i \rightarrow j$ へとrリンク」、第2項は「 $i \rightarrow j$ のm+r-1リンク路上で自己閉路(長さ0を仮定)を1リンク」を表現している。

LP(2m+1)では、必ずLP(m+1)にEL(m)を使うので、LP(2m+1)

=LP(m+1)+EL(m)、より一般的には、(2. 7)が成立する。

$$LP(2m+r) = LP(m+r) + EL(m) \quad (r=1, \dots, m) \quad (2. 7)$$

$k=m+r (>m)$ と置けば(2. 8), (2. 9)を得る。

$$LP(k+m) = LP(k) + EL(m) \quad \text{on } P(\max, +) \quad (2. 8)$$

$$LP(k+m) = LP(k) \times EL(m) \quad \text{on } P(\max, \times) \quad (2. 9)$$

(ケース1終わり)

さらに、以下のケース2, 3, 4についての検討結果は、[2]の4章を参照してください。

[ケース2] ELが単一SLで構成されるその他の3つの場合(ケース2a [$i \in EL, j \in EL$], ケース2b [$i \in EL, j \notin EL$], ケース2c [$i \notin EL, j \in EL$])。

[ケース3] ELが複数の分離SLより構成される場合。

[ケース4]最も一般的に、ELが複数の非分離SL群と複数の非単純閉路(NSL, Non-Simple Loop)により構成される場合。

概念的には一般的に以下のことが言える。

『最長路値LP(k)ならびにMAX-DAPのウェイト $x(k)$ の周期特性ELが複数の非分離SL群ならびに分離SL群より構成される場合は、十分大きなリンク数kに対して、(i, j)毎に専用巡回ELとなりうる閉路の周期長を $m_1, m_2, \dots, m_T$ とすると、個々の(i, j)については、 $m_s (s=1, 2, \dots, T)$ のどれかの周期特性を持つが、 $x(k)$ 全体としては、最長で $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_T$ の周期特性をもちうる。』

ケース4の一般的な場合については以下が予想できる。

『予想: 閉路長 $m_1, m_2, \dots, m_T$ のZ個のEL分離SL群とJ個のEL非分離SL群($\{m_j(1), m_j(2), m_j(3), \dots, m_j(Y_j)\} (j=1, 2, \dots, J) \rightarrow \text{LCM}(m_1, m_2, \dots, m_T, \{\text{GCD}(m_j(1), m_j(2), m_j(3), \dots, m_j(Y_j)) : j=1, 2, \dots, J\})$ 』

3. 不完全情報下の幾何平均DAP=LLS解

不完全情報下の算術平均DAPに関しては、その収束解が補正Harker法(Harker行列の対角要素 h_{ii} を、 $a_{ii} + M_i$ 代わりに、 $a_{ii} + \lambda M_i$ とする方法; M_i は第i行の欠落要素数)の収束解と一致することが[2]で証明されている。それでは、幾何平均DAPの収束解はどのようなのであろうか?

完全情報下では、行毎の幾何平均に、第1回目の反復で幾何平均DAPは収束する。一方、不完全情報下では、対数最小二乗(LLS)解に収束することが証明されている([2], [4])。

項目iの項目kからの評価値「 $a_{ik}x_k$ 」を S_i に含まれるkについて($\{a_{ik}x_k : k \in S_i\}$)、何らかの平均操作により平均値をとるわけだが、算術平均と幾何平均のどちらが適切だろうか?

[見解1] a_{ik} は比率データ、 x_k は「項目 k のウェイト」なので非比率データ、従って、「項目 i の項目 k から見たウェイト」 $a_{ik}x_k$ は非比率データとなる。□

[見解2] 「項目 i の項目 k から見たウェイト」 $a_{ik}x_k$ は、非比率データによる比率データの重み付けと考えれば、比率データと見なせる。さらに、非比率データと見なす x_k も、定数倍の自由度がある点を考慮すると、比率データであり、「比率データ x 比率データ」の「項目 i の項目 k から見たウェイト」 $a_{ik}x_k$ は、比率データと見なせる。□

「見解1」に立てば、算術平均が適切で、ウェイトベクトル算出法としては、Saaty 博士推奨の固有ベクトル法、「見解2」に立てば、幾何平均が適切で、完全情報下では行毎幾何平均法、不完全情報下では LLS 解が推奨される。

ここで、LLS 法は統計的回帰分析にもとづく手法であり、数理論的背景を持つ信頼性のあるウェイトベクトル算出法として知られている。

又、興味深いのは、Saaty 博士が a_{ik} 、 x_k 、 $a_{ik}x_k$ 等のデータに関して、「見解2」を強調している点である。従って、「比率データの平均には幾何平均を採用する」という原則に従い、

「見解2」の立場に立つならば、ウェイト算出法としては LLS 解が推奨されることになるのだが…。

4. 通常代数系以外での固有値・ベクトル

通常代数系とは和算 $\oplus$ に通常の和算 $+$ 、乗算 $\otimes$ に通常の乗数 $\times$ を採用した代数系 $P(+, \times)$ であり、 $n \times n$ 正方行列 A が適当な条件を満足すれば(主固有値・ベクトルを持てば)、 $\lim_{p \rightarrow \infty} A^p$ の各列は定数倍の自由度を許容して、各々右主固有列ベクトル $\mathbf{x}$ 、各行は左主固有行ベクトル $\mathbf{y}$ に近似することが知られている($c_i = Ky_i, d_i = Kx_i$)。

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A^p \doteq (c_1 \mathbf{x}, c_2 \mathbf{x}, \dots, c_n \mathbf{x}) \doteq \begin{pmatrix} d_1 \mathbf{y} \\ d_2 \mathbf{y} \\ \vdots \\ d_n \mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

さて、通常代数系以外では、(4.1)に示すような列毎・行毎に均等化する漸近特性は存在するだろうか？

もし、存在すれば、そのような均等化ベクトルを、その代数系における主固有ベクトルと見なすことができる。通常代数系以外、例えば、一般化平均採用時の補正 Harker 法において、正規化前定常解の反復毎の倍率 λ を用いて補正を行うが、この倍率 λ は通常代数系以外での主固有値と考えられる。

MAX-DAP に対応する $P(\max, \times)$ あるいは $P(\max, +)$ では一般的には周期的に振動するので(収束すれば話は別)、一意の主固有ベクトルは存在しない。以下に 2,3 の代数系で A^p を数値実験的に計算し、主固有ベクトル、主固有値に相当すると思われるベクトル等を見出したので報告する。

[例4.1] 通常代数系 $(+, \times)$ 、 $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (4.2) \quad A^9 = \begin{pmatrix} 890461 & 1297782 \\ 1946673 & 2837134 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 4783807 & 6972050 \\ 10458075 & 15241882 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

A^9 、 A^{10} の各列は正規化すると $(0.314, 0.686)^T$ 、各行は $(0.407, 0.593)$ に収束し、各々 A の右、左主固有ベクトル、主固有値は要素毎の A^{10}/A^9 の比率 $\doteq 5.37$ である。

[例4.2] 乗算代数系 $(\times, \times)$ 、 $n=2$

(4.3) と同じ A に対して、 A^9 、 A^{10} を以下に計算した。

但し、 $C=A \otimes B$ の (i, j) 要素計算式(4.5)で幾何平均をとった。

$$c_{ij} = \left(\prod_k (a_{ik} \times b_{kj}) \right)^{1/n} \quad (4.5)$$

$$A^9 = \begin{pmatrix} 637.449 & 1040.9 \\ 1561.42 & 2549.8 \end{pmatrix} \quad (4.6) \quad A^{10} = \begin{pmatrix} 1410.91 & 2304 \\ 3456 & 5643.6 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

各列は正規化すると $(0.29, 0.71)^T$ 、各行は $(0.38, 0.62)$ に収束し、乗算代数系 $(\times, \times)$ 下の A の右、左主固有ベクトル、主固有値は要素毎の A^{10}/A^9 の比率 $\doteq 2.213$ である。

[例4.3] 和算代数系 $(+, +)$ 、 $n=2$

(4.2) と同じ A に対して、 A^9 、 A^{10} を以下に計算した。

但し、 $C=A \otimes B$ の (i, j) 要素計算式(4.8)で算術平均をとった。

$$c_{ij} = (\sum_k (a_{ik} + b_{kj})) / n \quad (4.8)$$

$$A^9 = \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} \quad (4.9) \quad A^{10} = \begin{pmatrix} 23.5 & 24.5 \\ 25.5 & 26.5 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

各列の総和が0になるように正規化すると、 $(-1, 1)^T$ 、各行は $(-0.5, 0.5)$ に収束し、和算代数系 $(+, +)$ 下の A の右、左主固有ベクトル、主固有値は要素毎の $A^{10} - A^9$ の差分 $\doteq 2.5$ である。

5. 所与の固有値・ベクトルを持つ行列の構成法

固有値(群) $\{\lambda_i\}$ と固有ベクトル(群) $\{p_i\}$ が与えられた下で、それらを持つ正方行列 A の構成法として、(i) 直交ベクトル法、(ii) 対角化法、(iii) 自明解変形法、を提案し、その中で (iii) の「自明解変形法」について以下に数値例により考察する。なお、通常の固有値問題(順問題)では、行列 A が与えられた

下で固有値と固有ベクトルを求めるが、本論文で考察する行列構成問題は逆問題と位置づけられ、具体的応用としては、例えば、所与のウェイトベクトルとC I値が与えられたもとの比較行列の構成が挙げられる[5]。

以下に「自明解変形法」の基礎となる定理を3つ示す。

[定理 5.1] (5.1)で構成される n 次正方行列 A は r 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 対応する右固有(列)ベクトル $p_1, \dots, p_r$, 左固有(行)ベクトル $q_1^T, \dots, q_r^T$ を持つ ($r \leq n$)。

$$A = \sum_{k=1, \dots, r} \lambda_k p_k q_k^T \quad (5.1) \quad \text{但し, } p_i^T q_j = \delta_{ij} \quad (5.2) \quad \square$$

[定理 5.2] (5.3)の n 次正方行列 B は r 個の固有値 $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r$ 対応する右固有ベクトル $p_1, p_2, \dots, p_r$, 左固有ベクトル $q_1^T, q_2^T, \dots, q_r^T$ を持つ ($r \leq n$)。

$$B = A - \lambda_1 p_1 q_1^T \quad (5.3) \quad \square$$

[定理 5.3] (5.1)で構成される n 次正方行列 A は、 p_k ($k=1, \dots, r$) と直交する q_k , q_k ($k=1, \dots, r$) と直交する p_0 を固有値 $\lambda_0=0$ の各々左、右固有ベクトルとして持つ ($r < n$)。□
定理 5.2 と 5.3 は本質的に同じであるが、定理 5.1 において未指定の $n-r (\geq 0)$ 個として、指定済 r 個の $\{p_k\}$ と直交する q と指定済 r 個の $\{q_k\}$ と直交する p を固有値 0 の左、右固有ベクトルとして持つことを主張する。以上の定理にともづき、以下に(非負)確率行列の構成を検討する。

[例 5.1] 確率行列の構成(その 1)

$n=3, r=1$ で λ_1, p_1, q_1 を (5.4), (5.5), (5.6) で与える。

$$\lambda_1=1 \quad (5.4) \quad p_1=(1, 1, 1)^T \quad (5.5) \quad q_1=(0.2, 0.3, 0.5)^T \quad (5.6)$$

とし、(5.1)より A を計算する。確率行列 $P=A$ 、定常状態ベクトル $x=q_1$ とすると、明らかに(5.7)が成立するが、 P は自明な解である。

$$P^T x = x \quad (5.7)$$

そこで、(5.7)において $P=\{p_{ij}\}$ の各要素を変数、 $x=\{x_i\}$ の各要素は定数として、(5.7)を制約条件として、その第2式、第3式を以下に示す。

$$p_{12} = \{x_2(p_{21} + p_{23}) - x_3 p_{32}\} / x_1 \quad (5.8)$$

$$p_{13} = \{x_3(p_{31} + p_{32}) - x_2 p_{23}\} / x_1 \quad (5.9)$$

(5.8), (5.9)の右辺の変数 $p_{21}, p_{23}, p_{32}, p_{31}, p_{23}$ の中で、例えば変数群 $\{p_{31}, p_{32}\}$ を選択し、その値を以下で変化させる。

$$p_{31}=0.2 \rightarrow \text{new}p_{31}=0 \quad p_{32}=0.3 \rightarrow \text{new}p_{32}=0.4$$

新しい p_{12} と p_{13} が (5.8), (5.9) より、以下で計算できる。

$$\text{new}p_{12} = (0.3(0.2+0.5) - 0.5 \times 0.4) / 0.2 = 0.05 \quad (5.10)$$

$$\text{new}p_{13} = (0.5(0+0.4) - 0.3 \times 0.5) / 0.2 = 0.25 \quad (5.11)$$

又、確率条件より、(5.12), (5.13)となる。

$$\text{new}p_{11}=0.7 \quad (5.12) \quad \text{new}p_{33}=0.6 \quad (5.13)$$

従って、新しい確率行列として(5.14)を得る。

$$\text{new}P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.05 & 0.25 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

(例 5.1 終わり)

直交ベクトル法、対角化法、定理の証明、比率行列の構成など他の計算例、等については、[2]の4章を参照のこと。

6. おわりに

文献[2]においては、AHPとANPの数値心理学モデル(2章)、マインド遷移モデルMTM(3章)、動的平均化プロセスDAP(4章)、基本尺度 Fundamental Scale(5章)、について考察した。本論文は文献[2]の4章に基づき、DAPの固有ベクトルについて考察結果をまとめたものである。参考のために、文献[2]の4章の構成を付録に示す。

参考文献

[1] Shinohara, Masaaki: AHP EIGENVECTOR VIA DYNAMIC PROCESS OF PAIRWISE COMPARISON AND AVERAGING, *Proceedings of the International Symposium on the Analytic Hierarchy Process 2011, 144_019, (2011.6.16).*

[2] 篠原正明、篠原健：AHP/ANPの数値心理学的考察～表層・深層心理の意思決定モデル～、情報システム研究所報告、ISRC2013-2(2013.12)。

[3] Shinohara, Masaaki: Path Algebraic AHP Eigenvector Based on Max and Min Operators, *Proceedings of the International Symposium on the Analytic Hierarchy Process 2013 (2013.6.25).*

[4] 新田翔平、篠原正明：不完全情報下の幾何平均DAP収束解＝LLS解、平成25年度日本大学生産工学部第46回学術講演会・講演論文集、2-78(2013.12)。

[5] 高井亮輔、篠原正明：AHP逆問題の首都移転問題への適用、平成25年度日本大学生産工学部第46回学術講演会・講演論文集、2-43(2013.12)。

付録：文献[2]の4章の構成

4.1 DAPのA(Averaging)は統計的代表値 4.2 DAPは何のモデル

4.3 どのような代表値を採用すべきか 4.4 DAPの発展形

4.4.1 微分系 4.4.2 幾何平均DAPとLLS解

4.4.3 不完全情報下の一般化平均DAPとHarker法

4.4.4 パス代数DAP 4.4.5 MAX=DAPの振動特性

付4.1 通常代数系以外での固有値・ベクトル

付4.2 所与の固有値・ベクトルを持つ行列の構成法