

一般化平均に基づく AHP・DAP 特性

日大生産工(院)

○山田 遥輝

日大生産工

篠原 正明

1. はじめに

AHP などにおいて一対比較行列から各項目ウェイトを決定する評価プロセスとして、動的平均化プロセス(DAP)が提案されている。本論文では、P 乗一般化平均を用いて、5×5 の一対比較行列を用いて、整合性をなくしたり、逆比性をなくすことでどのように DAP 特性が変化するか、実験例を通して、考察する。

2. DAP とは

n 個の項目間の一対比較情報が与えられた時に、その情報を基に各項目の重要度が定まっていくプロセスとして DAP を提案した。本来は、「比較行列 A の右固有ベクトルを項目の重要度ベクトルとして採用することの正当性」を示すために DAP は提起された。

すなわち、離散時間 DAP(Dynamic Averaging Process)においては、ある時点 t における項目 i の重要度 $X_i(t)$ は、前時点 t-1 における項目 k からみた注目項目 i のウェイト $a_{ik}x_k(t-1)$ (k=1, 2, ..., n) の何らかの関数として定まると考える。

$$\begin{aligned} x_i(t) &= f(a_{i1}x_1(t-1), a_{i2}x_2(t-1), \dots, a_{in}x_n(t-1)) \\ &= f(a_{ik}x_k(t-1); k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.1)$$

最も直観的な関数は算術平均であろう。

$$f(a_{ik}x_k; k=1, 2, \dots, n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \quad (4.2)$$

不完全情報下においても、 $n_i = |S_i|$ を比較行列 A の第 i 行の実測要素数とすれば、(4.3)を得る。

$$f(a_{ik}x_k; k \in S_i, i=1, 2, \dots, n) = \frac{1}{n_i} \sum_{k \in S_i} a_{ik}x_k \quad (4.3)$$

本論文では、一般化平均(4.4)を用いて、完全情報と不完全情報の場合の DAP 特性を数値計算により考察する。

$$f(a_{ik}x_k; k \in S_i, i=1, 2, \dots, n) = \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k \in S_i} (a_{ik}x_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.4)$$

3. DAP 特性

3.1 完全情報で整合性がある場合

表 1：行列 A

1.00	2.00	3.00	4.00	5.00
0.50	1.00	1.50	2.00	2.50
0.33	0.67	1.00	1.33	1.67
0.25	0.50	0.75	1.00	1.25
0.20	0.40	0.60	0.80	1.00

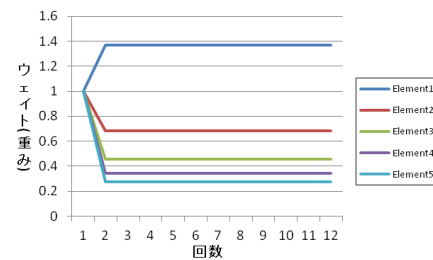


図 1-1: P=-5 一般化平均生データ

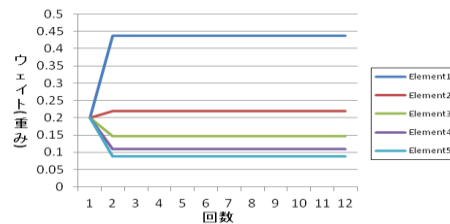


図 1-2: P=-5 一般化平均正規化データ

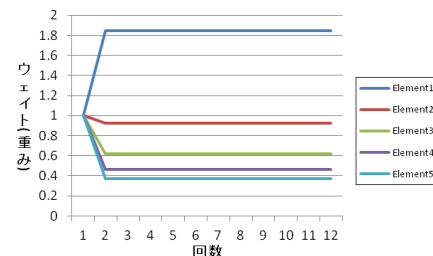


図 1-3: P=-2 一般化平均生データ

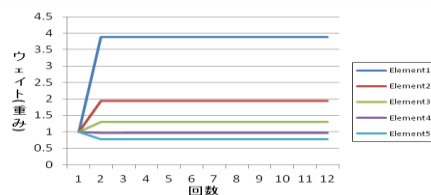


図 1-4: P= 5 一般化平均生データ

全てのパラメータ P について、整合行列についての正規化データは図 1-2 に一致した。

3.2 完全情報で整合性がなく逆比性がある場合

表 1 で a_{14}, a_{41} 変化[1.1]

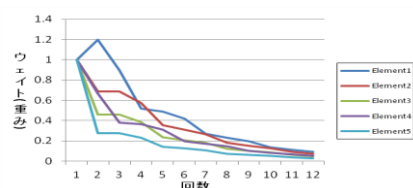


図 2-1: P= -5 一般化平均生データ

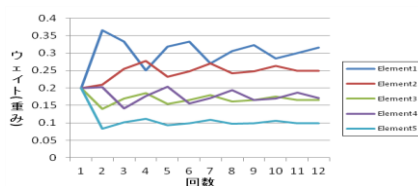


図 2-2: P= -5 一般化平均正規化データ

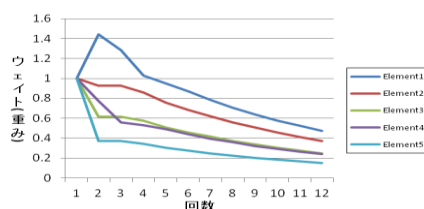


図 2-3: P= -2 一般化平均生データ

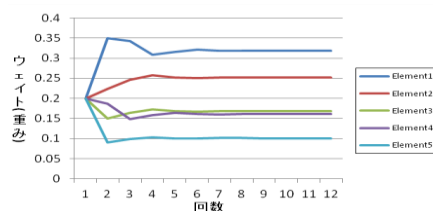


図 2-4: P=2 一般化平均正規化データ

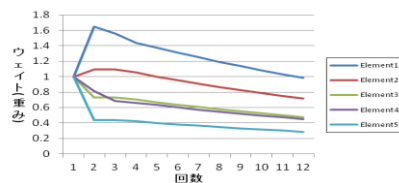


図 2-5: P= -1 一般化平均生データ

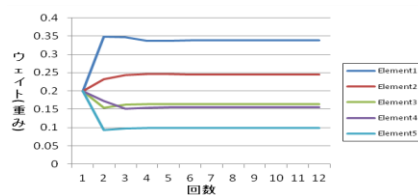


図 2-6: P= -1 一般化平均正規化データ

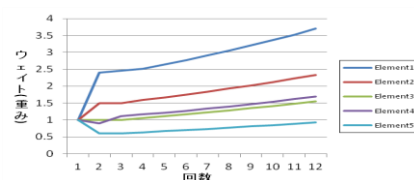


図 2-7: P= 1 一般化平均生データ

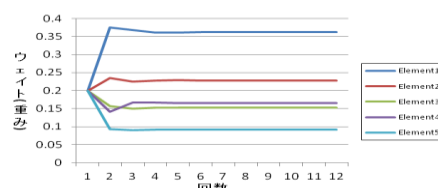


図 2-8: P= 1 一般化平均正規化データ

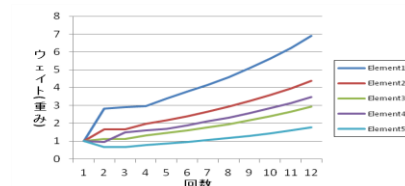


図 2-9: P= 2 一般化平均生データ

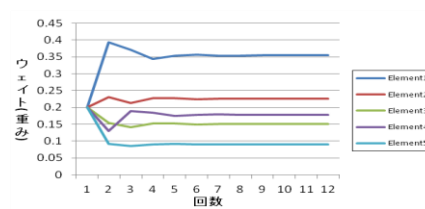


図 2-10: P= 2 一般化平均正規化データ

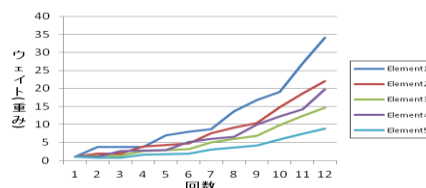


図 2-11: P= 5 一般化平均生データ

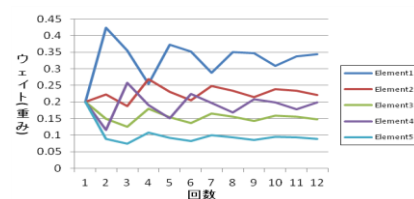


図 2-12: P= 5 一般化平均正規化データ

3.3 完全情報で整合性がなく逆比性が1つない場合

表1で a_{14} 変化[1]

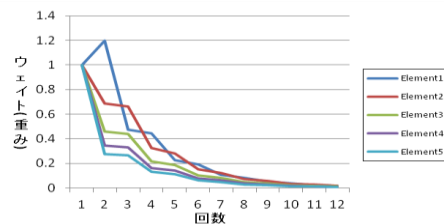


図 3-1: P= -5 一般化平均生データ

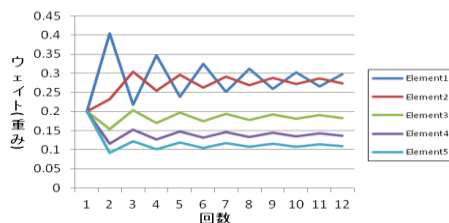


図 3-2: P= -5 一般化平均正規化データ

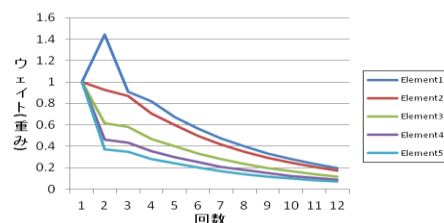


図 3-3: P= -2 一般化平均生データ

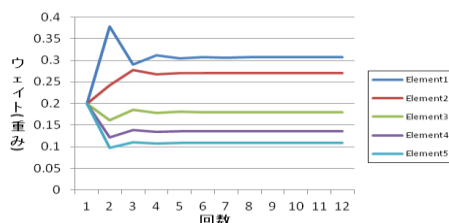


図 3-4: P= 2 一般化平均正規化データ

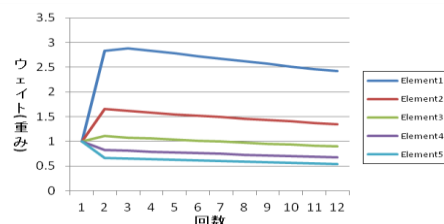


図 3-5: P= 2 一般化平均生データ

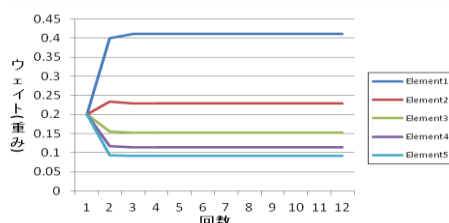


図 3-6: P= 2 一般化平均正規化データ

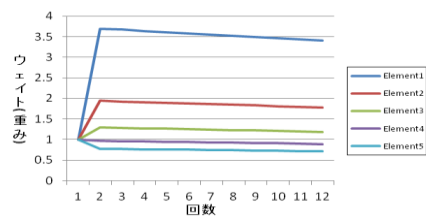


図 3-7: P= 5 一般化平均生データ

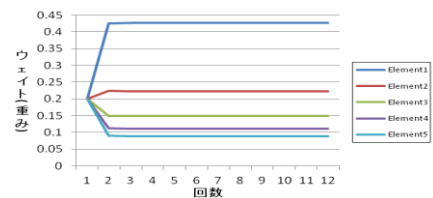


図 3-8: P= 5 一般化平均正規化データ

3.4 不完全情報で整合性がある場合

表1の行列Aの a_{12} , a_{21} , a_{34} , a_{43} を欠落要素としたものを表2の行列Bとする。

表 2 : 行列 B

1		3	4	5
	1	1.5	2	2.5
0.3333	0.6667	1		1.6667
0.25	0.5		1	1.25
0.2	0.4	0.6	0.8	1

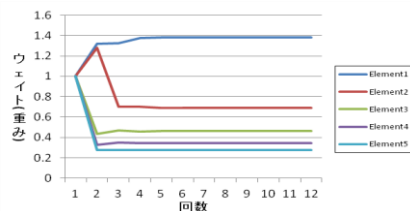


図 4-1: P= -5 一般化平均生データ

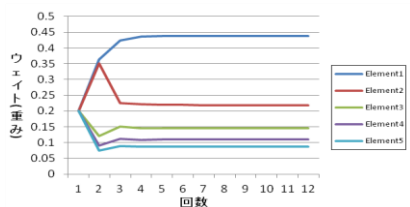


図 4-2: P= -5 一般化平均正規化データ

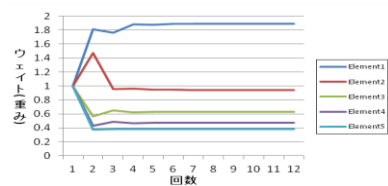


図 4-3: P= -2 一般化平均生データ

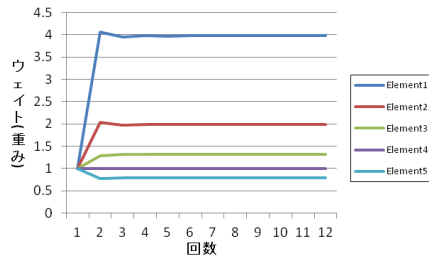


図 4-4: P= 5 一般化平均生データ

3.5 不完全情報で整合性がなく逆比性がある場合
表 2 で a_{14}, a_{41} 変化[1.1]

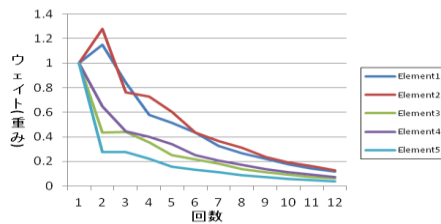


図 5-1: P= -5 一般化平均生データ

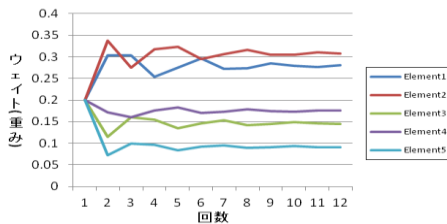


図 5-2: P= -5 一般化平均正規化データ

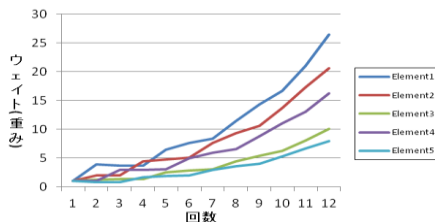


図 5-3: P= 5 一般化平均生データ

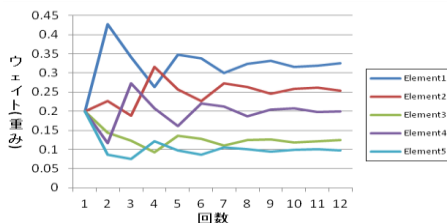


図 5-4: P= 5 一般化平均正規化データ

3.6 不完全情報で整合性がなく逆比性が 1 つない 場合
表 2 で a_{14} 変化[1]

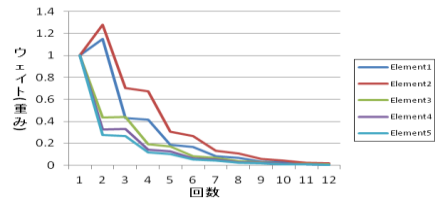


図 6-1: P= -5 一般化平均生データ

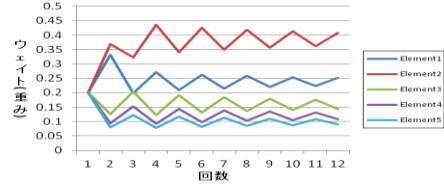


図 6-2: P= -5 一般化平均正規化データ

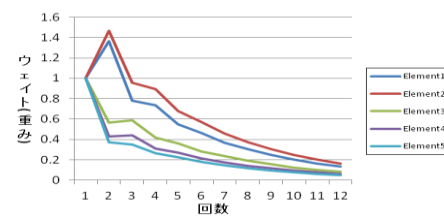


図 6-3: P= -2 一般化平均生データ

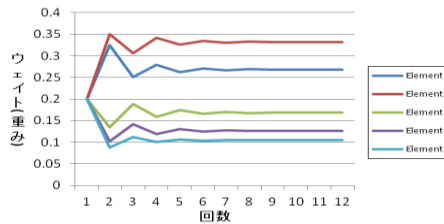


図 6-4: P=2 一般化平均正規化データ

4. 考察

1. 整合性かつ逆比性がある場合、 p をいくら変化しても正規化 DAP 特性は変化しなかった。
2. 整合がなく逆比性がある場合では、生データの場合 $p < 0$ の時 0 に収束していき、 $p > 0$ の時発散する(完全、不完全情報にかかわらず)。
3. 逆比性が 1 か所でくずれた場合は、全ての p で生データの特性は収束/発散の意味で同傾向である(完全、不完全情報にかかわらず)。
4. p 乗一般化平均 Harker 法($p \neq 0$)では、欠落要素を $0(p > 0)$ あるいは、 $\infty(p < 0)$ 、対角要素 (i, i) を $(a_{ii} + \lambda^p M_i)^{1/p}$ とした Harker 行列を完全情報の行列として扱うが、正規化特性が定常解で一定値となれば λ が定まれば、一般化平均 DAP 特性と一般化平均 Harker 法の収束解は正規化データで一致する。