

AHP 逆問題の首都移転問題への適用

日大生産工(院)

○高井 亮輔

日大生産工

篠原 正明

1. はじめに

通常のAHP (AHPの順問題) では、評価項目ベクトル x ($m \times 1$)、評価項目-代替案評価行列 A ($n \times m$) が与えられた下で、代替案ウェイトベクトル y ($n \times 1$) を $y = Ax$ (1)、により計算する。本論文では、2つの逆問題、

逆問題1: 「 y と A が与えられた下で x を求める問題」、
逆問題2: 「 x, y と、 A の一部が与えられた下で残りの A を求める問題」、について定式化する。さらに、この逆問題1の枠組みを高井による「気候変動下の首都機能移転のAHP」(文献[3])に適用し、どのように評価基準の重要度が変化すれば、注目する首都候補地のランクが向上するかを考察する。

2. 逆問題1

(1)において y, A が与えられた下で x を推定する方法としては、(1)の線形系が可解(唯一解、不定)、不能の場合に応じて統一的に一般化逆行列を適用できるが、未知数ベクトル x に対して $\sum x_j = 1, x \geq 0$ (2)の制約条件を課すために、以下の制約付き一般化逆行列の最小2乗解・推定問題を定式化する。

目的関数: $Z_1 = (y^T - x^T A^T)(y - Ax) \rightarrow \text{最小化}$ (3)

制約条件: $\sum x_j = 1$ (4) $x \geq 0$ (5)

不等号制約(5)に関しては可視領域アプローチ[1, 2]を採用するので、等号制約最適化問題として(3)と(4)でラグランジュ関数 L (6)を構成する。

$$L = (y^T - x^T A^T)(y - Ax) - \lambda (x^T 1 - 1) \\ = y^T y - 2x^T A^T y + x^T A^T A x - \lambda (x^T 1 - 1) \quad (6)$$

最適性条件は(7)、それを満たす x は(8)で与えられる。

$$L_x = 2A^T y + 2A^T A x - \lambda 1 = 0 \quad (7)$$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y + \frac{\lambda}{2} (A^T A)^{-1} 1 \quad (8)$$

但し、 $\lambda = 2(1 - 1^T (A^T A)^{-1} A^T y) / 1^T (A^T A)^{-1} 1$ (9)

目的関数(3)は、 x の(下に)凸関数であり、従って、以下の可視領域アプローチを適用できる。

[アルゴリズム]

(8)の解に x の負値が存在すれば、その値を0と固定し、それらを除去した変数群を新たにベクトル x 、同様に対応する評価項目群を除去した評価行列 A ($n \times m'$) を構成し、新たな(8)の解を求める。(8)の解が $x \geq 0$ を満足するまで、上記プロセスを繰り返す。□

なお、可視領域定理・アプローチについては、文献[1, 2]を参照のこと。文献[1]は、1994年発表の原論文、文献[2]では、[1]で提案した可視領域定理・アプローチを(i)凹目的関数、(ii)無制約最適解が領域解の時、(iii)非連結実行可能域、などの点で拡張・一般化した。

3. 逆問題2

$n \times m$ の評価行列 A を(10)で分割表示し、(1)の $y = Ax$ を(11)で表す。 B は $n \times m-1$, b は $n \times 1$, v は $m-1 \times 1$, z は 1×1 である。

$$A = (B, b) \quad (10) \quad y = Ax = (B, b) \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = Bv + bz \quad (11)$$

(11)において、 y, B, x (v と z)が与えられた下で評価行列 A の第 m 列 b (未知数ベクトル) を求める方法として、逆問題1と同様に以下の制約付き一般化逆行列の最小2乗解・推定問題を以下で定式化する。

目的関数: $Z_2 = (b^T - c^T)(b - c) \rightarrow \text{最小化}$ (12)

定数ベクトル: $c = (y - Bv) / z$ (13)

制約条件: $\sum b_i = 1$ (14) $b \geq 0$ (15)

等号制約(14)のみを考慮したラグランジュ関数 L (16)を構成し、最適性条件(17)を満たす b は(18)で与えられる。

$$L = (b^T - c^T)(b - c) - \lambda (b^T 1 - 1) = b^T b - 2b^T c + c^T c - \lambda (b^T 1 - 1) \quad (16)$$

$$L_b = 2b - 2c - \lambda 1 = 0 \quad (17) \quad b = c + (\lambda / 2) 1 \quad (18)$$

$$\text{但し、} \lambda = 2(1 - 1^T c) / n = 2(1 - \sum c_i) / n \quad (19)$$

目的関数(12)は b の凸関数であり、2章の逆問題1と同様に可視領域アプローチにもとづくアルゴリズムを適用することにより、 $b \geq 0$ を考慮した逆問題2を解

くことができる。

4. 首都機能移転問題のAHP 逆問題

文献[3]のAHPの階層図を図1に示す。文献[3]で採用した評価基準間一対比較表、評価基準—代替案間評価行列Aを表1、表2に示す。

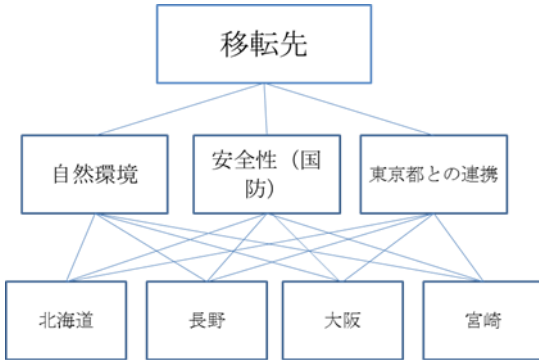


図1：首都機能移転問題AHPの階層図

表1：評価基準間一対比較表

	自然環境	安全性(国防)	東京都との連携
自然環境	1	1/2	1/3
安全性(国防)	2	1	1/2
東京都との連携	3	1/2	1

表2：評価基準—代替案間評価行列A

	自然環境	安全性(国防)	東京都との連携
北海道	0.166667	0.114389595	0.160097098
長野	0.166667	0.19923737	0.191082529
大阪	0.333333	0.368922624	0.306412159
宮崎	0.333333	0.317450411	0.342408214

表1の一対比較行列より、評価基準のウェイトベクトルは(20)を得る。

$$x^T = (0.204, 0.372, 0.424) \quad (20)$$

このウェイトベクトル下では、 $y = Ax$ より、代替案の総合ウェイトベクトル y は(21)となる。

$$y^T = (0.144, 0.189, 0.335, 0.332) \quad (21)$$

大阪と宮崎の差を広げた(22)のウェイトベクトルがAHPの総合化結果として得られるためには、評価基準ウェイトベクトルをどのようにコントロールすればよいかの逆問題タイプ1を以下に検討する。

目標代替案総合ウェイトベクトル

$$y^T = (0.12, 0.13, 0.35, 0.4) \quad (22)$$

Aが表2、目標 y が(22)で与えられ、等号制約最適化問題の解(8)に従って x を計算すると(23)を得る。但し、 λ は(24)で計算される。

$$x^T = (1.154, 0.149, -0.303) \quad (23) \quad \lambda = -0.025 \quad (24)$$

$x \geq 0$ が課せられているので、可視領域アプローチを適用して、 $x_3 = 0$ と固定する。

第3番目の評価基準「東京都の連携」を除外した2つの評価基準 $n=2$ 、代替案数 $n=4$ の等号制約最適化問題を再度解くと、(25)を得る（但し、 $x_3 = 0$ を含めた）。

$$x^T = (0.853, 0.147, 0.0) \quad (25)$$

(25)は非負制約 $x \geq 0$ を満足しているので、これが最終結果である。代替候補地「宮崎」のウェイトを増加するには「東京都との連携」を無視し、「自然環境」を「安全性」より5～6倍重要視すればよいことがわかる。なお、一般にウェイトベクトルから、それを主固有ベクトルとして持つ比較行列の構成法については文献[4]の第4章を参照して下さい。

5. おわりに

提案するAHP 逆問題あるいは逆AHPは、競走馬が勝つ確率をできるだけ均等にし、レースを面白くする目的で行われるハンデキャップ戦において競走馬ハンデを決定するための研究（逆問題タイプ2）に起因する（例えば[5]）。代替案同士を競わせて、意思決定の対象となるレースを面白く活性化するために、広い意味で活用することができる。

参考文献

- [1] 篠原正明：非線形最小2乗法による需要予測曲線のパラメータ推定法、統計数理研究所共同研究リポート53，最適化：モデリングとアルゴリズム4，pp. 216-241 (1994. 2)．
- [2] 篠原正明、篠原健：可視領域定理について、情報システム研究所報告、ISRC2013-3 (2013. 12)．
- [3] 高井亮輔：「地球寒冷化における気候変動下の首都機能移転のAHP」平成23年度数理情報工学科卒業論文（2012年2月）．
- [4] 篠原正明、篠原健：AHP/ANPの数理心理学的考察～表層・深層心理の意思決定モデル～、情報システム研究所報告、ISRC2013-2 (2013. 12)．
- [5] 高井亮輔：MAX 演算、MIN 演算を適用したAHPによるハンデ戦で行われる競馬の順位予測、平成24年度生産工学部第45回学術講演会講演論文集 (2012. 12)