

応力法による平面合成骨組の弾性安定問題の近似解法に関する研究

－ 部材の相対たわみ角と相対変位を独立成分とする定式化 －

日大生産工（院） ○木村 祐貴 日大生産工 川島 晃
（株）中田捷夫研究室 常川 重樹

1. はじめに

安定状態にある構造物に荷重が徐々に作用したとき、不安定な状態に移行する問題を一般に構造安定問題と呼んでいる¹⁾。この問題は構造物の形状変化（幾何学的非線形性）と構成部材の材料的非線形性（塑性変形履歴）を伴うため、支配方程式を節点変位で定式化する（変位型）有限要素法が常用されている²⁾。応力法は釣合いを満たす応力場を仮定するため、幾何学的非線形性を如何にして取り込むかが問題とされてきた³⁾。この欠点を補う解法として、常に初期形状（変形前の形状）を固定して支配方程式に幾何学的非線形性を考慮する全ラグランジ法が報告されている⁴⁾。この解法は部材の変形（ひずみ）が大きくなると、高次の非線形項を考慮する必要がある。また塑性変形履歴を考慮するためには、変形後の形状を逐次更新して幾何学的非線形性を考慮する解法（更新ラグランジ法）が望まれる。

更新ラグランジ法による応力法として、文献5)では立体トラスの幾何学的非線形解析を定式化し、安定条件に支配的な剛体回転の影響を分析できることを示した。文献6)では初期張力を一定に保持する自己釣合系の釣合形状を求めるケーブルネットの形態解析に拡張した。また文献7)では平面骨組の中立安定状態における座屈応力モード（自己釣合応力）を抽出する解法を定式化し、線形座屈解析を対象として理論解との数値検証を行った。

本報告では曲げ材とトラス材で構成される平面合成骨組および張弦梁のように自己釣合応力系を導入する構造システムにおける弾性安定問題の近似解法（力学的内容は第3節で述べる）を定式化する。また解法の近似化に伴い、長柱のエラスチカ（大変形）問題におけるチモシェンコの理論解との数値検証結果を述べる。

2. 仮定事項

- 1) 部材は断面の重心線で表す。
- 2) 荷重は節点に作用するものとする。
- 3) 骨組の全体座屈のみを扱う。
- 4) 弾性安定限界に及ぼす影響としては軸方向力と曲げ変形との連成効果（以後、 $P\delta$ 効果と呼ぶ）および軸方向力と部材回転との連成効果（以後、 $P\Delta$ 効果と呼ぶ）を考慮する。
- 5) 曲げモーメントによる部材の伸縮は無視する。また、せん断変形は考慮しない。その他、平面保持など線材としての仮定に従うものとする。

3. 更新ラグランジ法と近似解法の力学的内容

3.1 更新ラグランジ法

荷重・変形経路を零の状態から出発し、単調に増加させてゆくものとする。そのそれぞれの状態を次のように分割する。

$$Q(0), Q(1), Q(2), \dots, Q(i), Q(i+1), \dots, Q(F)$$

ここに、 $Q(0)$ は初期状態、 $Q(F)$ は最終状態とする。いま、 $Q(i)$ 状態（基準状態）に対する解が得られたとき、 $Q(i+1)$ 状態に至る増分量を求める。この際、各状態の増分量は微小であり、基本関係式はこれら増分量に関して線形化する。つまり、荷重・変形経路を区分的に線形化し追跡するとき、各節点および各構造部材は刻々その位置が変化するので部材座標（以後、局所座標と呼ぶ）を各状態毎に更新する。

3.2 基準状態の基本関係式

前述のように $Q(i)$ 状態までの解が得られたとき、釣合式と構成式および幾何学的関係式は次のように定式化する。

3.2.1 記号

部材(p)の独立な材端応力は、材端(A),(B)の曲げモーメント $\mathbf{m}_{(A,p)}$ 、 $\mathbf{m}_{(B,p)}$ と軸方向力 $\mathbf{n}_p$ の3成分である（図1）。また、部材変形は相対たわ

Study on Approximate Analysis of Stability problem of Plane Composite Frames by the Stress Method

- Formulization by Relative displacement and Slope of a Member -

Yuki KIMURA, Akira KAWASHIMA and Shigeki TSUNEKAWA

み角 $\tau_{(A,p)}$, $\tau_{(B,p)}$ と伸縮 $\delta\ell_{(p)}$ の3成分で表し、これらをまとめて次のベクトル記号で表す。なお、行列の転置は上付添字 T で表す。

$$\sigma_{(N,p)} = [m_{(A,p)}, m_{(B,p)}, n_{(p)}]^T \quad (1)$$

$$\tau_{(N,p)} = [\tau_{(A,p)}, \tau_{(B,p)}, \delta\ell_{(p)}]^T \quad (2)$$

ここに、 (N,p) の N は単に材端を示す印である。

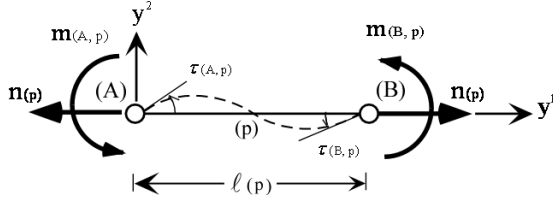


図1 部材に用いる記号(基準状態)

$\sigma_{(N,p)}$ と $\tau_{(N,p)}$ は、部材番号順 ($p=1,2,\dots$) に並べて σ と τ で表す。

$$\sigma = [\sigma_{(N,1)}, \sigma_{(N,2)}, \dots]^T \quad (3)$$

$$\tau = [\tau_{(N,1)}, \tau_{(N,2)}, \dots]^T \quad (4)$$

節点(N)に作用する力のモーメントを $m_{(N)}$ 、力のベクトルを $f_{(N)}$ として節点番号順 ($N=1,2,\dots$) に並べて m で表す。

$$m = [m_{(1)}, f_{(1)}, m_{(2)}, f_{(2)}, \dots]^T \quad (5)$$

節点(N)の節点角を $\theta_{(N)}$ 、変位ベクトルを $u_{(N)}$ として節点番号 ($N=1,2,\dots$) に並べて θ で表す。

$$\theta = [\theta_{(1)}, u_{(1)}, \theta_{(2)}, u_{(2)}, \dots]^T \quad (6)$$

3.2.2 釣合式

釣合式は次式で表す。

$$m = D\sigma \quad (7)$$

上式右辺の D は釣合行列であり、部材の局所座標 $y^1 - y^2$ 軸上に沿う単位ベクトル $a^1_{(p)}, a^2_{(p)}$

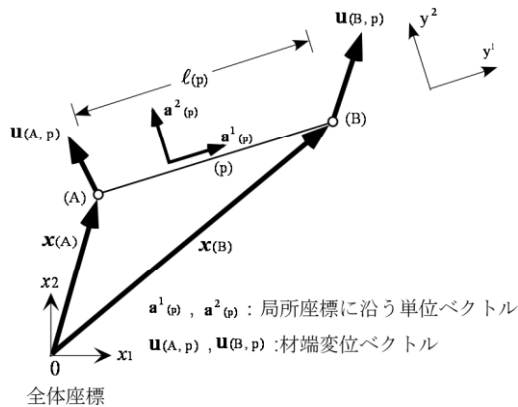


図2 座標系

(図2) で構成される。節点角・節点変位の自由度数を n とすると D は (n, m) 型行列となる。

3.2.3 構成式

$\sigma_{(N,p)}$ (式(1)) と $\tau_{(N,p)}$ (式(2)) の関係は柔性行列を $H_{(p)}$ とすると、

$$\tau_{(N,p)} = H_{(p)}\sigma_{(N,p)} \quad (8)$$

ここに、断面主軸に関する断面二次モーメントを $I_{(p)}$ 、部材(p)の断面積を $A_{(p)}$ 、材長を $\ell_{(p)}$ とすると、 $H_{(p)}$ は弾性曲線式より (9) 式で表せる (誘導過程は文献7) を参照)。

$$H_{(p)} = H^0_{(p)} + H^1_{(p)} \quad (9)$$

ここに、 $H^0_{(p)}$ は線形項である。

$$H_{(p)} = \begin{bmatrix} 2h_{(p)} & -h_{(p)} & 0 \\ -h_{(p)} & 2h_{(p)} & 0 \\ 0 & 0 & s_{(p)} \end{bmatrix} \quad (\text{曲げ材}) \quad (10-1)$$

$$h_{(p)} = \frac{\ell_{(p)}}{6EI_{(p)}} \quad , \quad s_{(p)} = \frac{\ell_{(p)}}{EA_{(p)}} \quad (10-2, 3)$$

$H^1_{(p)}$ は $P\delta$ 効果を考慮した柔性項である。

$$H^1_{(p)} = \begin{bmatrix} h1_{(p)} & h2_{(p)} & 0 \\ h2_{(p)} & h1_{(p)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{曲げ材}) \quad (11)$$

$$h1_{(p)} = -\frac{n_{(p)}\ell_{(p)}^3}{45(EI_{(p)})^2} \quad h2_{(p)} = \frac{7n_{(p)}\ell_{(p)}^3}{360(EI_{(p)})^2} \quad (12-1, 2)$$

ピン接合トラス材では $s_{(p)}$ (式(10-3)) のみ考慮する。式(8)は系全体に対して次式で表す。

$$\tau = H\sigma \quad (13)$$

ここに、 H は $H_{(p)}$ (式(9)) を部材番号順に対角項に並べた (m, m) 型行列である (m : 材端応力数 (=部材数 $\times 3$))。

3.2.4 幾何学的関係式

部材変形ベクトル τ (式(4)) と節点角・変位ベクトル θ (式(6)) の関係は式(14)で表せる。

$$\tau = D^T\theta \quad (14)$$

3.3 増分間の基本関係式

$Q_{(i)}$ 状態 (基準状態) に対する解が得られたとき、 $Q_{(i+1)}$ 状態に至る増分量を求める。基本関係式は基準状態における各部材の局所座標をもとに定式化する。なお、増分量には記号 Δ を付ける。

3.3.1 幾何学的関係式

増分間の幾何学的関係式は式(14)より式(15)

で表せる。

$$\Delta \tau = \mathbf{D}^T \Delta \theta \quad (15)$$

上式は未知の増分量 ($\Delta \mathbf{D}^T \theta$) を省略している。

3.3.2 P Δ 効果

図3に示すように、P Δ 効果は軸方向力 $n_{(p)}$ の方向変化に伴う局所座標 y^2 軸方向の成分力 $\Delta n^2_{(p)}$ で表す。部材の(微小)剛体回転を $\Delta r_{(p)}$ 、相対変位を $\Delta d^2_{(p)}$ とすると、 $\Delta n^2_{(p)}$ は式(16)で表せる。

$$\begin{aligned} \Delta n^2_{(p)} &= n_{(p)} \sin(\Delta r_{(p)}) \doteq n_{(p)} \frac{\Delta d^2_{(p)}}{\ell_{(p)}} \\ &= \frac{n_{(p)}}{\ell_{(p)}} \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^2_{(p)T} & \mathbf{a}^2_{(p)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{(A,p)} \\ \Delta \mathbf{u}_{(B,p)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、右辺の $\Delta \mathbf{u}_{(A,p)}$, $\Delta \mathbf{u}_{(B,p)}$ は材端(A),(B)の増分変位ベクトル (図2) である。ここに、ピン接合トラスでは式(16)のみを考慮する。

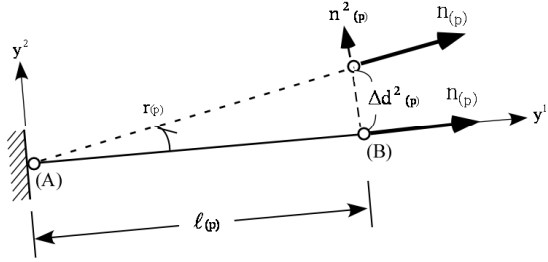


図3 P Δ 効果(基準状態)

$\Delta n^2_{(p)}$ は全体座標系に変換し、材端(A),(B)に及ぼす力のベクトルを $\Delta \mathbf{n}^2_{(A,p)}$, $\Delta \mathbf{n}^2_{(B,p)}$ と置くと、式(17)のように表せる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{n}^2_{(A,p)} \\ \Delta \mathbf{n}^2_{(B,p)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^2_{(p)} \\ \mathbf{a}^2_{(p)} \end{bmatrix} \Delta n^2_{(p)} \\ &= \left(\frac{n_{(p)}}{\ell_{(p)}} \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^2_{(p)} \\ \mathbf{a}^2_{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^2_{(p)T} & \mathbf{a}^2_{(p)T} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{(A,p)} \\ \Delta \mathbf{u}_{(B,p)} \end{bmatrix} \\ &\quad \dots (17) \end{aligned}$$

また、 $\Delta \mathbf{n}^2_{(A,p)}$, $\Delta \mathbf{n}^2_{(B,p)}$ が節点(N=A,B)に及ぼす力のベクトルを $\mathbf{P}_{\Delta(N)}$ で表す。これを節点番号順 (N=1,2,...) に並べて $\mathbf{P}_{\Delta}$ (式(18)) で表す。

$$\mathbf{P}_{\Delta} = [0, \mathbf{P}_{\Delta(1)}, 0, \mathbf{P}_{\Delta(2)}, \dots]^T \quad (18)$$

骨組が構成されたとき、材端変位ベクトル $\Delta \mathbf{u}_{(A,p)}$, $\Delta \mathbf{u}_{(B,p)}$ (式(17)右辺) は節点(N=A,B)の変位ベクトル $\Delta \mathbf{u}_{(N)}$ に等しいから系全体の節点角・節点変位ベクトル $\Delta \theta$ を用いると、 $\mathbf{p}_{\Delta}$ (式(18)) は次式のように表せる。

$$\mathbf{p}_{\Delta} = \mathbf{\Lambda} \Delta \theta \quad (19)$$

ここに、右辺の $\mathbf{\Lambda}$ は式(19)右辺の () 内を系全体に亘ってまとめた (n , n) 型行列である。

3.3.3 釣合式

荷重増分 $\Delta \mathbf{m}$ が作用したとき釣合式は次式で表せる。

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{D} \Delta \sigma + \mathbf{P}_{\Delta} \quad (20)$$

3.3.4 構成式

式(13)より、増分間に適用する構成式は次式で表せる。

$$\Delta \tau = \mathbf{H} \Delta \sigma \quad (21)$$

ここに、柔性 $\mathbf{H}$ は基準状態を一定に保持するものとしている。つまり、P δ 効果を考慮した柔性項 $\mathbf{H}^I_{(p)}$ において、未知の増分量 $\Delta n_{(p)}$ (式(12-1, 2)) は省略している。

4. 釣合式の一般解と変形の適合条件式

増分間に適用する釣合式 (式(20)) の一般解は次式で表せる。

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma^P + \Delta \sigma^C \quad (22)$$

上式右辺 $\Delta \sigma^P$ は特解である。

$$\Delta \sigma^P = \mathbf{D}^+ (\Delta \mathbf{m} - \mathbf{P}_{\Delta}) \quad (23)$$

ここに、 $\mathbf{D}^+$ は釣合行列 $\mathbf{D}$ のムーア・ペンローズ一般逆行である。(n, m) 型行列 $\mathbf{D}$ のランクは n ($\leq m$) であり、 $\mathbf{D}^+$ は (n, n) 型の対称行列 $\mathbf{D} \mathbf{D}^T$ を用いて、単純な行列演算 (式(24)) で求まる。

$$\mathbf{D}^+ = \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \mathbf{D}^T)^{-1} \quad (24)$$

式(22)右辺の σ^C は余解 (荷重増分ベクトル $\Delta \mathbf{m} = \mathbf{0}$ の解) であり、式(25)で与えられる。

$$\Delta \sigma^C = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D}) \Delta \beta \equiv \mathbf{G} \Delta \gamma \quad (25)$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_r] \quad (\mathbf{g}_i : \text{独立ベクトル}) \quad (26)$$

式(25)の $\mathbf{I}$ は (m, m) 型単位行列、 $\Delta \beta$ は任意ベクトルである。また、(m, m) 型係数行列 $(\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D})$ はその独立な列ベクトル $\mathbf{g}_i$ (自己釣合応力モード) で作る (m, r) 型行列 $\mathbf{G}$ (式(26)) で表す。 r は不静定次数 ($=m-n$) である。

変形の適合条件式は与える荷重 $\Delta \mathbf{m}$ とは無関係に生じる $\mathbf{g}_i$ (式(26)) を仮想力とすると仮想仕事の原理より次式のように表せる。

$$\mathbf{G}^T \Delta \tau = \mathbf{G}^T \mathbf{H} \Delta \sigma = \mathbf{0} \quad (27)$$

節点角・節点変位ベクトル $\Delta \theta$ (式(15)) は、次

式で表せる。

$$\Delta\theta = (\mathbf{D}^T)^+ \Delta\tau = (\mathbf{D}^T)^T \Delta\tau \quad (28)$$

5. 応力法方程式

変形の適合条件式 (式(27)) は式(22) と式(25) より次式で表せる。

$$\mathbf{G}^T \mathbf{H} (\Delta\sigma^p + \Delta\sigma^c) = \mathbf{G}^T \mathbf{H} (\Delta\sigma^p + \mathbf{G} \Delta\gamma) = \mathbf{0} \quad (29)$$

上式をベクトル $\Delta\gamma$ について解き、式(25)に代入すると余解 $\Delta\sigma^c$ は

$$\Delta\sigma^c = -\mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{H} \Delta\sigma^p \quad (30)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \quad (\mathbf{C} : (r, r) \text{ 型対称行列}) \quad (31)$$

である。式(30)より、 $\Delta\sigma^c$ は基準状態における柔性 $\mathbf{H}$ により特解 $\Delta\sigma^p$ を再配分する (自己釣合系の) 材端応力を表していることが分かる。

一般解 (式(22)) に $\Delta\sigma^c$ (式(30)) を代入する。

$$\Delta\sigma = (\mathbf{I} - \mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{H}) \Delta\sigma^p \quad (32)$$

ここに、 $\Delta\sigma^p$ は式(23)である。

$\Delta\theta$ (式(28)) は構成式 (式(21)) を用いると、

$$\Delta\theta = (\mathbf{D}^T)^T \mathbf{H} \Delta\sigma \quad (33)$$

となる。上式右辺 $\Delta\sigma$ に式(32)と式(23)を代入すると次式を得る。

$$\Delta\theta = (\mathbf{D}^T)^T \mathbf{H} (\mathbf{I} - \mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{H}) \mathbf{D}^+ (\Delta\mathbf{m} - \mathbf{P}_\Delta) \quad (34)$$

上式の $\mathbf{P}_\Delta$ に式(19)を代入して、

$$\mathbf{K}_s^{-1} = (\mathbf{D}^T)^T \mathbf{H} (\mathbf{I} - \mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{H}) \mathbf{D}^+ \quad (35)$$

とおくと、式(34)は次式のように表せる。

$$\Delta\theta = \mathbf{K}_s^{-1} (\Delta\mathbf{m} - \Lambda \Delta\theta) \quad (36)$$

上式より、節点角・節点変位ベクトル $\Delta\theta$ で表現する応力法方程式は次式で表せる。

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}_s^{-1} \Lambda) \Delta\theta = \mathbf{K}_s^{-1} \Delta\mathbf{m} \quad (37)$$

ここに、 (n, n) 型行列 $(\mathbf{I} + \mathbf{K}_s^{-1} \Lambda)$ が特異 (式(38)) のとき、骨組全体の座屈現象を表す。

$$|\mathbf{I} + \mathbf{K}_s^{-1} \Lambda| = 0 \quad (38)$$

6. 数値検証

解法の近似化に伴い、中心圧縮力を受ける長柱 (図4) の大変形問題におけるチモシエンコの理論解⁸⁾ との数値検証を述べる。特異点 (式(38)) では頂点の水平変位が材長 ℓ_0 の 1/1000 になるように、座屈変位 (式(37) $\Delta\theta$ の) モードを与えた。図5は

頂点水平方向の荷重変位曲線である。同図中の○印は軸変形を無視して有限回転を考慮する理論解である。

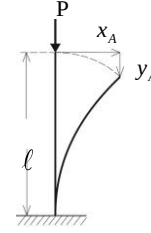


図4 エラスチカ問題(4分割)

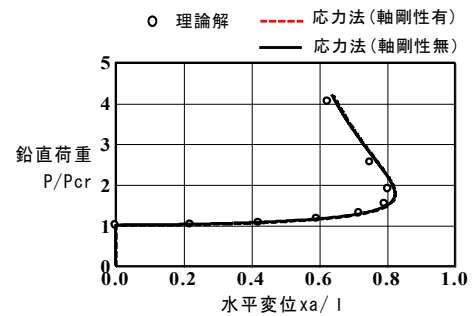


図5 頂点水平方向の荷重変位曲線

7. あとがき

以上、変位法を補完する解法として、節点角・節点変位ベクトルで表現した平面合成骨組の更新ラグランジ法による弾性安定問題の近似解法を示した。また、その精度を確認した。応力法は自己釣合応力系 (式(25)) が得られるので張力を導入する構造システムにも適用可能である。

参考文献

- 1) 田中尚, 半谷裕彦: 不安定トラスの剛体変位と安定化条件, 日本建築学会論文報告集, NO. 356, pp. 35-42, 1985. 10
- 2) 鷺津久一郎, 他共著: 有限要素法ハンドブック II 応用編, 培風館, pp. 117-167, 1999. 4
- 3) 近藤一夫著: コンピュータによる極限解析法シリーズ 6 鋼構造骨組の塑性崩壊解析, 培風館, 1991. 7. 5
- 4) Aref, A.J. and Zaoyang G.: Framework for finite element-based large increment method for nonlinear structural Problems, Journal of Engineering Mechanics, 127 (7), 739-746, 2001
- 5) 川島晃, 花井重孝: 一般逆行列に基づく応力法による立体トラスの有限変位応力解析, 構造工学論文集, Vol. 54B, pp. 241-250, 2008. 3
- 6) A. Kwashima, Y. Takeuchi, and S. Hanai: Shape Analysis of Self-Equilibrating Cable Networks with Initial Tension Adjusted by Stress Method, Journal of Structural Engineering, Vol. 57B, pp. 47-54, 2011. 3
- 7) 塚越達也: 応力法による平面骨組の線形座屈解析, 平成 23 年度修士論文梗概集, 日本大学大学院生産工学研究科建築工学専攻
- 8) チモシエンコ・ギアー著: 弾性安定の理論<上巻>, プレイン図書出版, 1974. 10