

データ変換をともなうDEA(その5)

— 一般化平均DEAならびにLPによるFDHの実現 —

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

篠原 健

1. はじめに

パラメタ p を持つ一般化平均DEAにおいて、 $p=1$ 以外では非線形なフロンティアが実現できるが、 $p \rightarrow -\infty$ の極限においてはFDH (Free Disposal Hull) [1]と同じPPS (Production Possibility Set, 生産可能集合)が近似実現できることを示す。

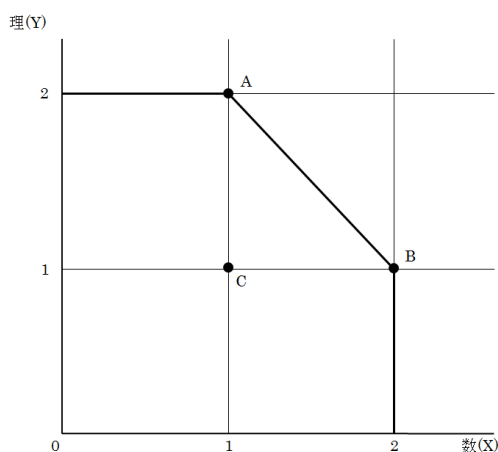
2. 1入力2出力モデルでのFDH実現

2.1 3DMU1入力2出力モデル

表1の3学生数理解成績データに対して、パラメタ p を持つ一般化平均DEAの離散評点DEAによる計算評価結果を表2に示す。又、表1のデータに対するデータプロット図を図1に示す。

表1 3DMU1入力2出力データ (2.1節)

生徒	A	B	C
入力	1	1	1
出力	数学	1	2
	理科	2	1

図1 出力データのプロットと線形フロンティア ($p=1$)

すなわち、 $p \rightarrow -\infty$ の極限で (表2では $p=-100$)、FDHのPPSに近似した経常をとることが理解できる。数学の点数軸を y_1 、理科のそれを y_2 とするならば、DMU 1, 2を包絡する非線形フロンティアはDMU 1, 2を通過するので、(1)を満足する。

$$y_1^p + y_2^p = 1 + 2^p \quad (1)$$

原点DMU 3を結ぶ直線($y_1 = y_2$)が非線形フロンティア(1)と交又する点を (y, y) とすれば、 y は p をパラメタとして $y(p)$ (2)式となる。

$$y(p) = ((1+2^p)/2)^{1/p} \quad (2)$$

よって、理論的にDMU 3のDEA効率値 E_3 は(3)式で評価できる。

$$E_3 = 1/y(p) = (2/(1+2^p))^{1/p} \quad (3)$$

表3にパラメタ p に対するDEA効率値 E_3 の理論計算値を示すが、表2のDMU 3の効率値と一致する。

なお、表3において、 $p \rightarrow -\infty, \pm 0, +\infty$ の極限値の評価では、(3)式の両辺の対数を取り、ロピタルの定理を適用した。

2.2 7DMU1入力2出力モデル

表4の7学生数理解成績データに対して、一般化平均DEA (離散評点DEA) の表計算結果を表5に示す。

表4: 1入力2出力データ (2.2節)

生徒	A	B	C	D	E	F	G
入力 授業時間	1	1	1	1	1	1	1
出力	数学	3	6	9	10	1	5
	理科	10	9	7	3	9	5

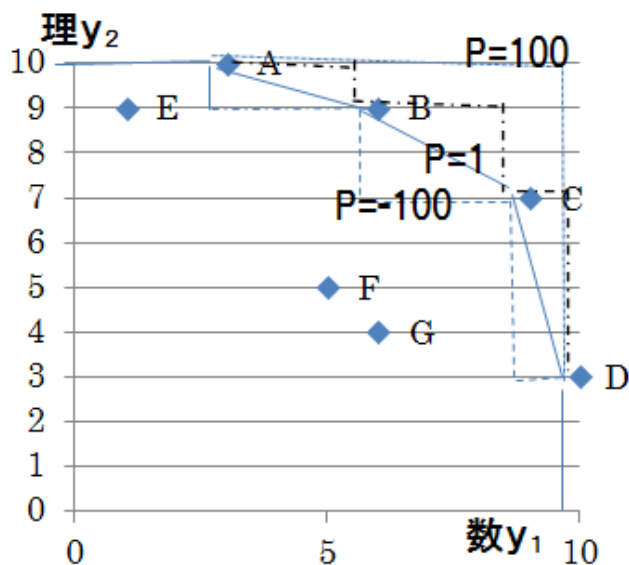


図2：7学生・数理解成績（2.2節）の2次元プロットと各種非線形フロンティア

なお、図2に $p=1$ （区分線形フロンティア、実線）、 $p=-100$ （近似FDHフロンティア、破線）、 $p=100$ （最大値フロンティア、点線）、でのフロンティアを示すが、表5の効率計算値を裏付けている。

パラメタ p が $p=1$ から増加すると、フロンティア面が $p=1$ の区分直線から図2では右上へふくらむ凸形状の非線形フロンティアとなり（ $p=2$ で円弧状、（その3）の図5.3参照）、各区分フロンティアは全DMUA $\tilde{G}$ を包絡する必要があるため（包絡分析なので）、 $p \rightarrow +\infty$ の極限では図2において、1点鎖線状ではなく、点線（ $p=100$ ）のフロンティア面を形成する。

一方、パラメタ p が $p=1$ から減少すると、区分直線状のフロンティアから内側にへこむ凹形状の非線形フロンティアとなり（（その3）の図5.3参照）、 $p \rightarrow -\infty$ の極限では図2において破線（ $p=-100$ ）のフロンティア面を形成する。 $p < 1$ の凹形状の非線形フロンティアでは、各区分フロンティアは全DMUA $\tilde{G}$ を自然に包絡しているため、結果としてFDH状の非凸なPPSが形成される。 $p > 1$ では、各区分フロンティアが規定する凸領域の共通部分としてのPPSは凸集合となるが、 $p < 1$ ではそうならない。

なお、（その2）のLP解法を適用すれば、表4の各素データを p 乗した変換データ（たとえば、表6）に対

して、DEA・CCRモデル（正確には、入出力逆転モデル、Inverted DEA Model）として、LP解法を適用し、その1以上の効率値に逆変換（ $1/p$ 乗）をほどこせば、 $p \rightarrow -\infty$ の極限において、FDHを実現できる。表6の $p=-10$ の場合については、表5の数値と一致した値を得た。 $P=-100$ については、表6に相当する変換データの桁が各データ毎に異なりすぎるため、数値計算上の問題が発生し、妥当な数値解を得ていない。

2.3 変形7DMU1入力2出力モデル

表4の成績データにおいて、学生Fのデータ（数=5点、理=5点）のみを、（数=7点、理=8点）と変更した表7の成績データに対して、一般化平均DEA（離散評点DEA）を適用する。FDH形のPPSでは、学生Fもフロンティア上に登場するが、表8の計算結果（ $p=-10$ の学生Fの効率値、等に注意）から、この点を確認することができる。

3. おわりに

1入力2出力の学生数理解成績データに対して、パラメタ p を持つべき乗型一般化平均DEAを適用して、 $p \rightarrow \infty$ の極限でのFDH型PPSの近似実現を実証した。（その2）のLP解法を適用したアルゴリズムも検証したが、通常のエクセル表計算では $p=10 \sim 10$ 程度のべき乗は数値計算上特に問題は発生していない様子であるが、 $p=100$ 以上、 $p=-50$ 以下のべき乗計算においては、LP解法適用時のみならず、離散評点表計算適用時にも、データの桁の不揃いに起因する計算結果の精度上の問題が発生している様子がうかがえる。エクセル表計算での信頼度、倍々精度演算等の精度向上対策により、FDH近似の精度向上が今後の課題である。

参考文献

- [1] Deprins, D., Simar, L., and Tulkens, H.: Measuring Labor Inefficiency in Post Offices, in Marchand, M., Pestieau, P. and Tulkens, H. (eds.) *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurements*, 243-267 (1984).

表 2 : パラメタ p に対する DEA 効率値 (2.1 節)

パラメタ p		-100	-10	-2	-1	0.01	1	2	10	100
DEA 効率値	DMU1, A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	DMU2, B	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	DMU3, C	0.993	0.933	0.791	0.75	0.707	0.667	0.632	0.536	0.503

表 3 : DEA 効率値 E_3 の理論計算値

p	$-\infty$	-2	-1	-0	+0	1	2	$+\infty$
E_3	1.0	$\sqrt{5}/2\sqrt{2}$	0.75	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	2/3	$\sqrt{0.4}$	0.5

表 5 : パラメタ p に対する DEA 効率値 (2.2 節)

パラメタ p	-100	-10	-1	0.01	1	2	10	100
学生 DMU A	1	1	1	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1	1	0.902	0.9
C	1	1	1	1	1	1	0.907	0.9
D	1	1	1	1	1	1	1	1
E	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
F	0.714	0.702	0.656	0.648	0.641	0.633	0.536	0.5
G	0.6	0.664	0.658	0.655	0.651	0.646	0.601	0.6

表 6 : 数理解績データ (表 4) を $p=-10$ 乗したデータ $\times 10^7$ ($p=-10$)

学生 DMU	A	B	C	D	E	F	G
(数 $\hat{p}) \times 10^7$	169.35	0.1654	0.00287	0.001	10^7	1.024	0.1654
(理 $\hat{p}) \times 10^7$	0.001	0.00287	0.0354	169.35	0.00287	1.024	9.537

表 7：変形した成績データ (2.3節)

生徒		A	B	C	D	E	F	G
入力	授業時間	1	1	1	1	1	1	1
出力	数学	3	6	9	10	1	7	6
	理科	10	9	7	3	9	8	4

表 8：パラメタ p に対するDEA効率値 (2.3節)

パラメタ p	-100	-10	-1	0.01	1	2	10	100
学生 DMU A	1	1	1	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1	1	0.902	0.9
C	1	1	1	1	1	1	0.907	0.9
D	1	1	1	1	1	1	1	1
E	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
F	1	1	0.998	0.985	0.974	0.961	0.819	0.8
G	0.666	0.664	0.658	0.655	0.651	0.646	0.601	0.6