

データ変換をとまなうDEA(その4)

— $y=10\sqrt{x}$ とGPA—

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

富山 広也

1. はじめに

学生の複数科目成績に対して DEA 的評価を行う際に、成績素点(素データ、変換前データ)に何らかの変換を行った変換後データを用いる時には、学生の DEA 成績評価値(効率性)に、『効率性の非一貫性』(「効率的学生＝フロンティア上の優秀学生」が変換法に依存して変化する)、『学生間の逆転現象』(DEA 効率値において、変換前は学生 A > 学生 B であるが、変換後は学生 A < 学生 B となる)、などの要注意現象が発生することを、簡単な例題を通して説明する。

2. 成績データ変換法

本論文では、(i) $y=10\sqrt{x}$ 変換(その2)付録1参照)と(ii)GPA 変換(多レベル離散化変換)を考える。なお、GPA 変換の例を図1(a),(b)に示す。

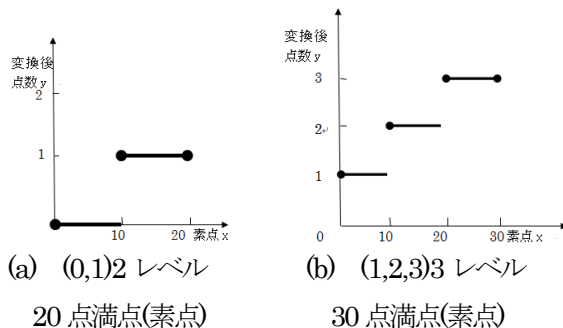


図1: GPA 変換(多レベル離散化変換)の例

3. $y=10\sqrt{x}$ 変換を用いた DEA 型成績評価例

$y=10\sqrt{x}$ を一般化して、「 $y=x^p$ 」型のデータ変換法を採用した時の DEA 型成績評価例を以下に検討する。

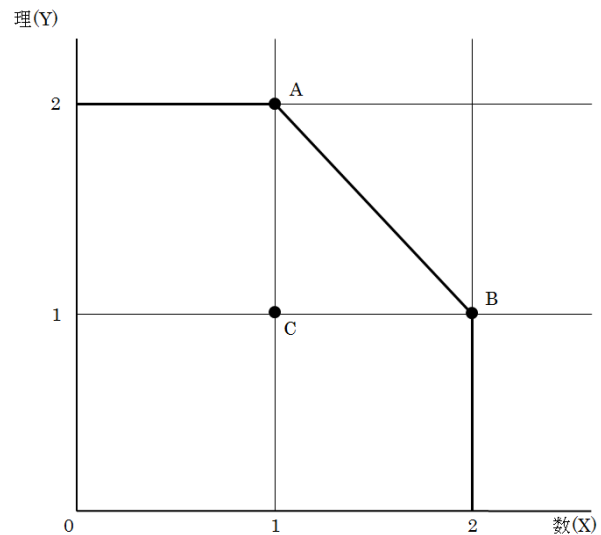
3.1 3DMU1 入力 2 出力の例(効率値の p 依存性)

単純な例題を用いて、フロンティア面の幾何的な構成を考察するために、表1に示す3DMU1入力2出力データの例1を考えよう。

表1 3DMU1入力2出力データ(例1)

生徒		A	B	C
入力		1	1	1
出力	数学	1	2	1
	理科	2	1	1

表1のデータに対するデータプロット図を図2に示す。

図2 例1の入出力データのプロットと線形フロンティア($p=1$)

$p=2$ と0.5の場合について離散評点DEAの表計算により計算したDEA効率値を表2に示す。

表2 DEA効率値 (例1)

学生		A	B	C
DEA効率値	P=1	1	1	0.6667
	P=2	1	1	0.6325
	P=0.5	1	1	0.6863

すなわち、学生A、BのDEA効率値は $p=2$ と $p=0.5$ の場合も $p=1$ と同様に1.0で効率的であるが、非効率な学生CのDEA効率値が、学生Cの効率値($p=2$) < 学生Cの効率値($p=1$) < 学生Cの効率値($p=0.5$)、という大小関係にある。これは、図3に示すように、学生Cの参照集合に相当するフロンティア部分 (学生A～学生B) が、 $p=1$ で直線(1)、 $p=2$ で円弧(2)、 $p=0.5$ で曲線(3)が各々包絡曲線となるためである。

$$p=1 \quad X+Y=3 \quad (1)$$

$$p=2 \quad X^2+Y^2=5 \quad (2)$$

$$p=0.5 \quad \sqrt{X}+\sqrt{Y}=1+\sqrt{2} \quad (3)$$

原点0から学生Cを結ぶ直線OC($X=Y$)と(1)との交点 C' は(4)、(2)との交点 C'' は(5)、(3)との交点 C''' は(6)で与えられ、それぞれの直線距離状比率

$$\frac{OC}{OC'}, \frac{OC}{OC''}, \frac{OC}{OC'''} \text{ は(7)、(8)、(9)となり、表}$$

2の学生CのDEA効率値と一致しているのが確認できる。

$$X=1.5, Y=1.5 \quad (4)$$

$$X=\sqrt{\frac{5}{2}}, Y=\sqrt{\frac{5}{2}} \quad (5)$$

$$X=\frac{3+2\sqrt{2}}{4}, Y=\frac{3+2\sqrt{2}}{4} \quad (6)$$

$$\frac{OC}{OC'}=\frac{2}{3} \doteq 0.667 \quad (7)$$

$$\frac{OC}{OC''}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{0.4} \doteq 0.6325 \quad (8)$$

$$\frac{OC}{OC'''}=\frac{4}{3+2\sqrt{2}} \doteq 0.6863 \quad (9)$$

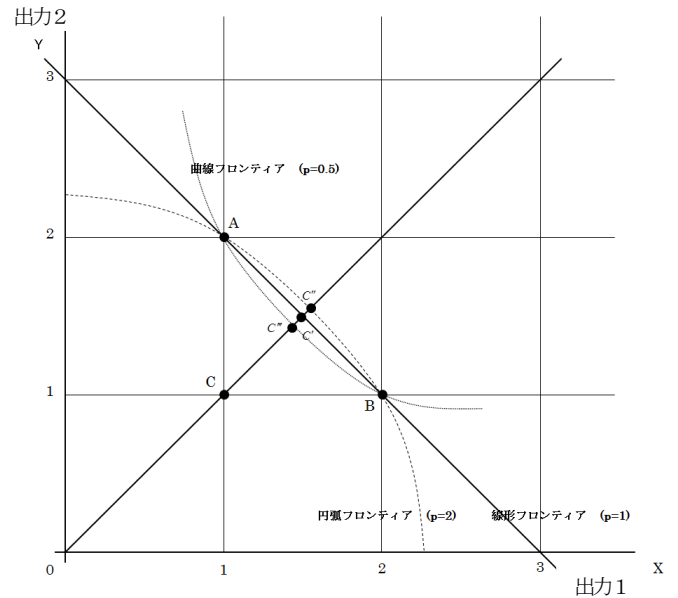


図3 パラメタ $p=1,2,0.5$ でのフロンティア曲線

3.2 3DMU1入力2出力の例(効率的学生の非一貫性)

1入力2出力の例1では、 $p=2$ の楕円弧フロンティアを採用することにより、線形フロンティアと比較してフロンティア面がふくらみ、その結果として、非効率なDMUの効率値は減少(厳密には非増加)の傾向にある。

$p=0.5$ の曲線フロンティアを採用すると、フロンティア面がへこむため、その結果として、もともと非効率なDMUの効率値は増加(厳密には非減少)の傾向にある。

なお、もともと効率的なDMUについては、例1では $p=2$ でも $p=0.5$ でも効率的であるが、これは必ずしも常に保証されるわけではないことは、表3、あるいは表4の3DMU1入力2出力データの $p=2$ の場合を考えれば『効率的学生のパラメタ p に依存しない一貫性』の反例となることから理解できる。

表3 効率的DMUの p 不変性に対する反例となる3DMU1入力2出力データ (その1)

DMU		A	B	C
入力		1	1	1
出力	1	1	2	3
	2	3	2	1

DEA効率値 (その1)

学生		A	B	C
DEA効率値	P=1	1	1	1
	P=2	1	0.894	1
	P=0.5	1	1	1

表4 効率的DMUの p 不変性に対する反例となる3DMU 1
入力2出力データ (その2)

DMU		A	B	C
入力		1	1	1
出力	1	10	21	30
	2	30	21	10

DEA効率値 (その2)

学生		A	B	C
DEA効率値	P=1	1	1	1
	P=2	1	0.939	1
	P=0.5	1	1	1

3.3 4DMU1 入力2 出力の例(逆転現象)

表5のデータに対する p をパラメータとした DEA 効率値の計算結果を表6に示すが、 p に依存して学生 C と D の効率値が逆転していることがわかる

表5 4DMU1 入力2 出力データ(3.3 節)

DMU		A	B	C	D
入力		1	1	1	1
出力	1	10	20	14	9
	2	20	10	14	18

表6 p をパラメータとした DEA 効率値(3.3 節)

DMU		A	B	C	D
DEA効率値	P=0.5	1	1	0.961	0.9
	P=1	1	1	0.9333	0.9
	P=2	1	1	0.885	0.9

4. GPA 変換を用いた DEA 型成績評価例

日本大学生産工で採用されている GPA 変換は、「60 点未満→0(D)、60 点以上～70 点未満→1(C)、70 点以上～80 点未満→2(B)、80 点以上～90 点未満→3(A)、90 点以上～100 点以下→4(S)」の素点 100 点満点・5 レベ

ル(1,2,3,4,5)の離散化変換であるが、本章では図 1(a)に示した素点 20 点満点・2 レベル(0,1)の GPA 変換を採用した時の DEA 型成績評価例を以下に検討する。

4.1 4DMU2 入力1 出力の例(効率的学生の非一貫性、逆転現象)

表7に示す4学生2教科成績データに対して、GPA 変換 $y=G(x)$ を用いた DEA 型成績評価例を適用した結果を表8に示す。

表7 4DMU1 入力2 出力データ(変換前/後)

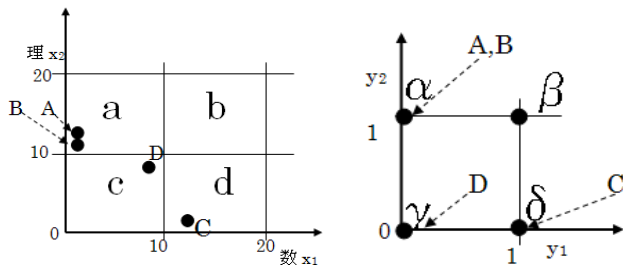
学生	A	B	C	D
入力	1	1	1	1
出力1 (数学)	1/0	1/0	12/1	9/0
出力2 (理科)	12/1	11/1	1/0	9/0

表8 変換前/後での DEA 効率値

学生	A	B	C	D
GPA変換前データでのDEA効率値	1	0.9166	1	1
GPA変換後データでのDEA効率値	1	1	1	0

表8に示すように、変換前では学生 B(効率値=0.917)が非効率的、学生 B 以外が効率的だが、変換後では、学生 D が非効率値(効率値=0)となり、それ以外は全て効率的となる。

又、学生 B、D に注目すると、変換前後で逆転現象が生じている。さらに、図4に示すように変換前領域(x_1, x_2 平面)での領域 a, b, c, d が変換後領域(y_1, y_2 平面)での4点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対応しており、領域 a 内の効率的学生 A、非効率的学生 D が同一点 α に写像変換され、両学生ともに変換後は効率的となる。



(a)変換前領域(x_1 - x_2 平面) (b)変換後領域(y_1 - y_2 平面)

図4：20点満点の2教科素点(x_1, x_2)に対する2レベル(0, 1)のGPA変換 $y=G(x)$ での変換前領域(x_1 - x_2 平面)と変換後領域(y_1 - y_2 平面)

5. おわりに

複数科目成績のDEA的評価において、GPAなど離散化変換を行ったデータを用いる時には、『効率性の非一貫性』、『学生間の逆転現象』等の現象が発生する点を分析した。なお、この現象は成績データのDEA的評価に限定されない。今後の課題は、凸関数、非凸関数変換を多入出力DEAに適用した時に発生する現象の分析である。

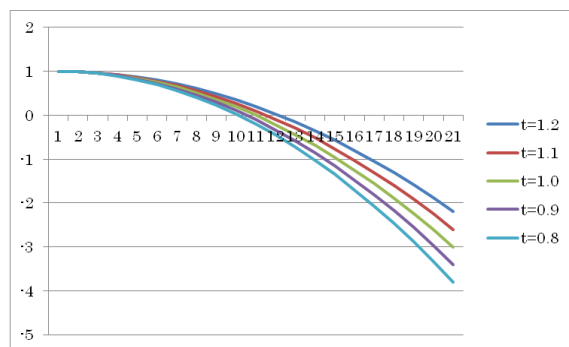
付録1：楕円曲線のフロンティア曲線

$p=2$ の場合の楕円曲線は項目数=2の場合にフロンティア曲線は一般には、(A1)となるが、これを(A2)と変形し、さらに $a=1$ 、 $b=t$ と置き、(A3)を t をパラメタとして図A1に示す。

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (A1)$$

$$Y = \pm \sqrt{a - bX^2} \quad (A2)$$

$$Y = \sqrt{1 - tX^2} \quad (A3)$$



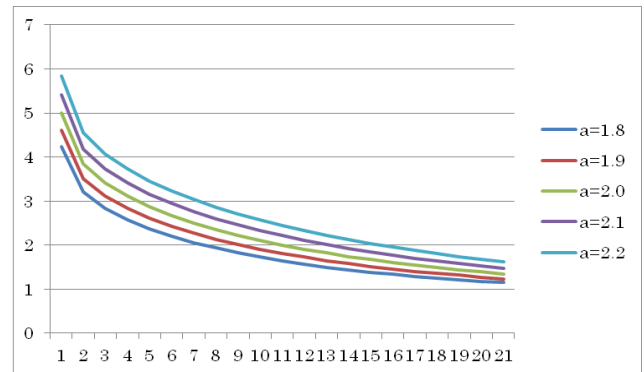
図A1 楕円曲線 $tX^2 + Y^2 = 1$ ($t=0.8 \sim 1.2, 0.1$ 毎)

付録2： $p=0.5$ のフロンティア曲線

$p=0.5$ の場合の曲線についても項目数=2の場合にフロンティア曲線は一般には(B1)となるが、 $a=b$ とすると(B2)を得る。(B2)を a をパラメタとして図B1に示す。

$$\frac{\sqrt{X}}{a} + \frac{\sqrt{Y}}{b} = 1 \quad (B1)$$

$$Y = a^2 + X - 2a\sqrt{X} \quad (B2)$$



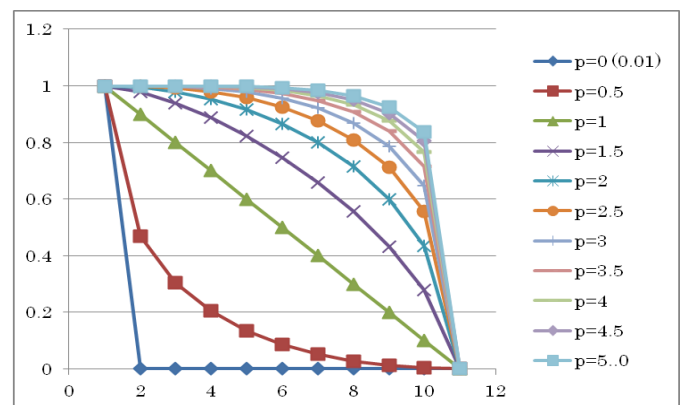
図B1 曲線 $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = a$ ($a=1.8 \sim 2.2, 0.1$ 毎)

付録3： p 次一般化平均のフロンティア面

項目数=2で等しい重みでの p 次一般化平均のフロンティア面等高線は(C1)あるいは(C2)で表現できるが、 p を0(厳密には0.01)から5.0まで変化した時の形状を図5.8に示す。

$$X^p + Y^p = 1 \quad (C1)$$

$$Y = (1 - X^p)^{\frac{1}{p}} \quad (C2)$$



図C1 $X^p + Y^p = 1$ のパラメタ p を動かした時の形状