

データ変換をとまなうDEA(その3)

— 一般化平均とデータ変換 —

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

富山 広也

1. はじめに

(その1) [1], (その2) [2]においては、データ変換として一般化平均関数を採用した。本論文(その3)では、一般のデータ変換を採用した場合(2章)ならびに一般化平均採用時に平均であるがゆえに必要な平均化重み (u, v) の正規化条件(3章)について考察する。

2. 一般のデータ変換と一般化平均

(その2) [2]においては、 $VI, V0$ を既存の算術平均から一般化平均へと一般化したために、(その2) [2]の(1), (2)式の変換式を採用した。この理由は、 x を $f(x)$ で変換後、 f^{-1} で逆変換して元の単位に戻す必要があると考え、さらに VI と $V0$ を一種の平均値あるいは代表値として取り扱う事により統一的な視点を持つことを意図したからである。しかしながら、単純に考え、 VI_j と $V0_j$ を以下の(1)、(2)で定義することも可能である。すなわち、入力データ $X=\{x_{ij}\}$ 、出力データ $Y=\{y_{rj}\}$ を変換後入力データ $X^{(f)}=\{f(x_{ij})\}$ 、変換後出力データ $Y^{(g)}=\{g(y_{rj})\}$ とすればよい。

$$DMU_j \text{ の仮想入力 } VI_j = \sum_{i=1}^m v_i f(x_{ij}) \quad (1)$$

$$DMU_j \text{ の仮想出力 } V0_j = \sum_{r=1}^s u_r g(y_{rj}) \quad (2)$$

さらに一般化して、(3), (4), (5), (6)による定義も可能である。

$$VI_j = \sum v_i f_{ij}(x_{ij}) \quad (3)$$

$$V0_j = \sum u_r g_{rj}(y_{rj}) \quad (4)$$

$$VI_j = F_j(v, X_j^{(f)}) \quad (5)$$

$$V0_j = G_j(u, Y_j^{(g)}) \quad (6)$$

但し、 $X_j^{(f)} = \{f_{ij}(x_{ij})\}$, $Y_j^{(g)} = \{g_{rj}(y_{rj})\}$.

(1)～(4)の定義式を採用する限りは、 DMU_k の相対効率値 R_k 最大化(DEA効率値 D_k)の問題(7)～(9)は $u \geq 0, v \geq 0$ の制約を付加することにより、 $X^{(f)}$ と $Y^{(g)}$ を各々入出力データ行列とするCCRモデルとして、LP定式化(10)～(13)に帰着できる。

$$DMU_k \text{ の DEA 効率値 } D_k = \max_{(u, v)} R_k(u, v) \quad (7)$$

$$DMU_k \text{ の 相 対 効 率 値 } R_k(u, v) = \frac{A_k(u, v)}{\max_j \{A_j(u, v)\}} \quad (8)$$

$$DMU_k \text{ の 絶 対 効 率 値 } A_k(u, v) = \frac{VO_k(u, v)}{VI_k(u, v)} \quad (9)$$

—————LP定式化—————

$$\text{目的関数: } u^T Y_k^{(g)} \rightarrow \text{最大化} \quad (10)$$

$$\text{制約条件: } v^T X_k^{(f)} = 1 \quad (11)$$

$$v^T X^{(f)} \geq u^T Y^{(g)} \quad (12)$$

$$u \geq 0, v \geq 0 \quad (13)$$

変換後データで画一的に全て議論すれば特に問題は生じないが、変換前データに戻って効率性を議論する必要があると、例えばテスト成績評価問題([2]の付録1)において、 $y=10\sqrt{x}$ 変換前の原採点データでの複数教科のDEA的評価を行う場合には、非線形フロンティアの問題、変換前後における学生間での効率値逆転、フロンティア上の効率的学生の変化などの諸問題が発生する([3])。これらの問題に対処するための1つの方法として、 VI と $V0$ の(その2) [2]の定式化(1), (2)中に逆変換を考慮した一般化平均DEAが位置づけられる。

DEA with Data Transformation
Part 3: Generalized Mean and Data Transformation

Masaaki SHINOHARA and Hiroya TOMIYAMA

3. 平均化重み(u, v)の正規化条件

VI, V0を一種の平均値と考えるため、(その1) [1] の (3), (4)において、u, vの各要素には非負で総和=1 という条件(14), (15)が課されている。

$$\sum v_i=1, v_i \geq 0 \quad (14)$$

$$\sum u_r=1, u_r \geq 0 \quad (15)$$

この正規化条件がDEA原定式化(その1) (5)～(7) (あるいは(16)～(18))、さらにはCCRモデルLP定式化((その1) [1] (8)～(11)に及ぼす影響について、(その1) [1]3. 1節の前提で以下に考察する。

$$A_j(u, v) = \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \quad (16)$$

$$R_k(u, v) = \frac{\frac{u^T y_k}{v^T x_k}}{\max_j \left\{ \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \right\}} \quad (17)$$

$$D_k = \max_{(u, v)} R_k(u, v) \quad (18)$$

(18)において、CCRモデルLP定式化を意識すると

$$\text{非負値条件「} u \geq 0, v \geq 0 \quad (19) \text{」、}$$

厳密に正ウェイトを意識すると

$$\text{正值条件「} u > 0, v > 0 \quad (20) \text{」}$$

を(u, v)の変化領域として設定する。さらに、一般化平均DEAを意識すると、(17)においてx, yは分母、分子に1回ずつ、合計2回出ているので、

$$\text{正規化条件「} \sum v_i=1, \sum u_r=1 \quad (21) \text{」}$$

を課することができる。

(17)は分数なので正規化条件(21)の1つの緩和(ここでは、 $\sum u_r=1$ を除去)とひきかえに、分母を、例えば、1と固定する(1でなくても良いが、1でも良い)と、(22)～(25)となる。

$$\text{目的関数: } \frac{u^T y_k}{v^T x_k} \rightarrow \text{最大化} \quad (22)$$

$$\text{制約条件: } \max_j \left\{ \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \right\} = 1 \quad (23)$$

$$\sum v_i=1 \quad (24)$$

$$u \geq 0, v \geq 0 \quad (25)$$

(23)は(28)となり、さらに目的関数(22)は分数なので、

残った正規化条件(24)の緩和(除去)とひきかえに、その分母を、例えば、1と固定すると、(26)～(29)となる。

$$\text{目的関数: } u^T y_k \rightarrow \text{最大化} \quad (26)$$

$$v^T x_k=1 \quad (27)$$

$$v^T y_j \leq v^T x_j \quad j=1, \dots, n \quad (28)$$

$$u \geq 0, v \geq 0 \quad (29)$$

ここで、(26)～(29)は典型的なDEA・CCRモデルのLP定式化であり、これより、例えば非効率的DMU等に見られるように、ウェイトu, vが一意ならば、DEA・CCRモデルのLP解ウェイト(u_{LP}, v_{LP})と(18), (20), (21)にもとづく離散評点DEA・表計算によるウェイト(u_D, v_D)は、(30), (31)に示すように定数倍の自由度の範囲で一致する。また、効率的DMU等に見られるように、ウェイトu, vが一意でないならば、(30), (31)が成立する離散評点DEA・表計算によるウェイト(u_D, v_D)が存在する。

$$u_{LP} \doteq K_1 u_D \quad (30)$$

$$v_{LP} \doteq K_2 v_D \quad (31)$$

なお、(30), (31)が近似式なのは、LP連続値評価と離散評点評価にもとづく誤差が存在する為である。

4. おわりに

一般化平均以外のデータ変換法(2節)、DEA原定式化の数理計画連続ウェイトと離散評点DEA・表計算による離散ウェイトが定数倍の自由度の範囲で一致する事(3節)を検討した。今後の課題は、凸関数、凹関数変換を多入出力DEAに適用した時に発生する現象の分析である。

参考文献

- [1] 篠原正明、篠原健：データ変換をとまなうDEA(その1)―データ変換と定式化―、平成24年度日本大学生産工学部第45回学術講演会講演論文集(2012.12).
- [2] 篠原正明、篠原健：データ変換をとまなうDEA(その2)―一般化平均DEAのLP解法―、平成24年度日本大学生産工学部第45回学術講演会講演論文集(2012.12).
- [3] 篠原正明、富山広也：データ変換をとまなうDEA(その4)― $y=10\sqrt{x}$ とGPA―、平成24年度日本大学生産工学部第45回学術講演会講演論文集(2012.12).