

非線形平均化プロセスQDAPの実験例

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

篠原 健

1. はじめに

一対比較行列Aが与えられた時に、各項目のウェイトが項目間の相互評価を通して定まて行く様子を数学的に定式化したものが動的平均化プロセスDAP(Dynamic Averaging Process)である。DAPは線形であり、2次項を考慮すると、QDAP(Quadratic DAP)となる。

本論文では、項目係数 $n=3$ の簡単なQDAPについて、一対比較実験における2次項の係数推定法、ならびにQDAP動特性を考察する。

2. DAPの例($n=3$)

3つの果物「りんご($i=1$)、みかん($i=2$)、バナナ($i=3$)」がどの程度好きかを、一対比較行列 $A=\{a_{ij}\}$ のデータをもとに、相互評価と平均化のプロセスにより数式化すると、(1)~(3)あるいは(4)のDAPとなる。

$$x_1(t+1) = (a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t))/3 \quad (1)$$

$$x_2(t+1) = (a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t))/3 \quad (2)$$

$$x_3(t+1) = (a_{31}x_1(t) + a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t))/3 \quad (3)$$

$$x_i(t+1) = (a_{i1}x_1(t) + a_{i2}x_2(t) + a_{i3}x_3(t))/3 \quad i=1,2,3 \quad (4)$$

なお、通常は初期点 $t=0$ での初期ウェイトは情報が無いので、 $x_1(0)=1, x_2(0)=1, x_3(0)=1$ と設定する。ここで、 $x_i(0)=0$ とすれば、項目 i を無視することになる。又、各時点でウェイト総和 $=1$ と正規化すれば、正規化条件(5)すなわち更新式(6)を付与する。この場合、初期ウェイトは $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1/3$ となる。

$$x_1(t+1) + x_2(t+1) + x_3(t+1) = 1 \quad (5)$$

$$x_i(t+1) \leftarrow x_i(t+1)/(x_1(t+1) + x_2(t+1) + x_3(t+1)) \quad i=1,2,3 \quad (6)$$

参考：一般の n については、(7)となる。

$$x_i(t+1) \leftarrow x_i(t+1)/\sum_{k=1}^n x_k(t+1) \quad (7)$$

(4)は項目 i に対する一般式($n=3$)であるが、以下を意味する。
「時点 $t+1$ での項目 i のウェイト $x_i(t+1)$ は、時点 t での項

目1(りんご)から判断した項目 i のウェイト($a_{i1}x_1(t)$)、項目2(みかん)から判断した項目 i のウェイト($a_{i2}x_2(t)$)と項目3(バナナ)から判断した項目 i のウェイト($a_{i3}x_3(t)$)の3つを足して、($n=3$)で割った値(算術平均)で更新する。」

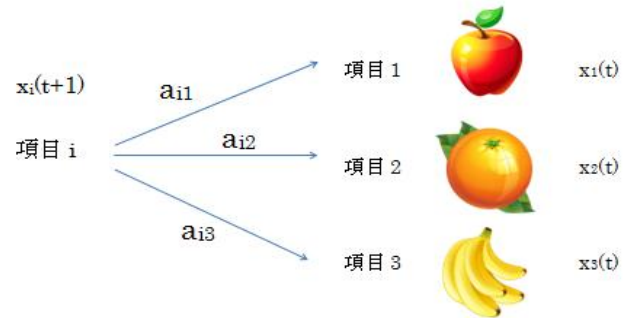


図 1:DAP更新式の図解

3. QDAPの例($n=3$)

2節と同様に3つの果物を比較するが、その評価プロセスが以下のQDAP(8)~(10)で与えられる場合を考えよう。

$$x_1(t+1) = ((a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t)) + cx_2(t)x_3(t))/3 \quad (8)$$

$$x_2(t+1) = ((a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t)) + dx_1(t)x_3(t))/3 \quad (9)$$

$$x_3(t+1) = (a_{31}x_1(t) + a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t))/3 \quad (10)$$

(8)の右辺第4項 $cx_2(t)x_3(t)$ を右辺第2項 $a_{12}x_2(t)$ と一緒に $x_2(t)$ でまとめると(8a)、右辺第3項 $a_{13}x_3(t)$ と一緒に $x_3(t)$ でまとめると(8b)と整理できる。同様に(9)の右辺第4項 $dx_1(t)x_3(t)$ を右辺第1項 $a_{21}x_1(t)$ と一緒に $x_1(t)$ でまとめると(9a)、右辺第3項 $a_{23}x_3(t)$ と一緒に $x_3(t)$ でまとめると(9b)と整理できる。

$$x_1(t+1) = (a_{11}x_1(t) + (a_{12} + cx_3(t))x_2(t) + a_{13}x_3(t))/3 \quad (8a)$$

$$x_1(t+1) = (a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + (a_{13} + cx_2(t))x_3(t))/3 \quad (8b)$$

$$x_2(t+1) = (a_{21} + dx_3(t))x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t))/3 \quad (9a)$$

$$x_2(t+1) = (a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + (a_{23} + dx_1(t))x_3(t)) \quad (9b)$$

以下では、更新式(8a),(9a),(10)の場合を考察する。

更新式(8a),(9a),(10)を(11)式の形式で整理すると、実効的な一対比較値 $A^* = \{a_{ij}^*\}$ は(12)で与えられる。

$$X(t+1) = \frac{1}{n} A^* X(t) \quad (n=3) \quad (11)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + cx_3 & a_{13} \\ a_{21} + dx_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (12)$$

(12)において、 $x_3 = 0$ ならば $A = A^*$ (13)が成立するが、 $x_3 > 0$ ならば、一般には $A \neq A^*$ (14)となる。 A と A^* は以下の(1,2)要素と(2,1)要素以外は全く同じである。

$$a_{12}^* = a_{12} + cx_3 \quad (15)$$

$$a_{21}^* = a_{21} + dx_3 \quad (16)$$

a_{12}従来通りの一対比較で、項目1(りんご)と項目2(みかん)の2つの項目のみに注目し(項目3(バナナ)の事はその存在を無視して)、両者を比較して項目2を基準に項目1が何倍好きか?の測定値である。

a_{12}^*目前に3つの項目(りんご、みかん、バナナ)を見せて(あるいは頭の中で想定させて)、この3つの中で、項目2を基準に項目1が何倍好きか?の測定値である。

(15)より、項目3(バナナ)のウェイト x_3 が0ならば($x_3 = 0$)、すなわち、項目3を想定してもそのウェイトが0ならば

「 $a_{12}^* = a_{12}$ 」となることがわかる。そのウェイトが非零(すなわち、正の時 $x_3 > 0$)、項目3の存在を想定することにより一対比較値(1,2)が a_{12} から $a_{12} + \Delta a_{12}$ へと変化するならば、 Δa_{12} が x_3 に比例するとし、その比例定数を c と考える

$$\Delta a_{12} = cx_3 \quad (17)$$

従って、比例定数 c は(18)より推定できる。

$$c = (a_{12}^* - a_{12})/x_3 \quad (18)$$

(18)において、項目3のウェイト x_3 はQDAPで2次の交差項を無視した線形DAPの正規化した定常解を採用するのが一案である。線形DAPではウェイトベクトルを正規化すれば必ず主固有ベクトルに収束するので、それを定常解として用いればよい。非線型なQDAPではウェイトベクトルは正規化しても収束する保証はないので、(18)は近似推定式である。本来ならば、線形DAPの定常解の x_3 と(18)により推定した比例定数 c を用いたQDAPの

近似定常解 $\tilde{x}_3$ とを比較し、両者が近似しなければ、 $\tilde{x}_3$ を(18)の x_3 として、反復すべきであろう。

同様に比例定数 d は(19)より推定する。

$$d = (a_{21}^* - a_{21})/x_3 \quad (19)$$

a_{12} と a_{21} の間のみならず a_{12}^* と a_{21}^* に間にも逆比性の成立

を仮定するならば、 c と d の間には(20)あるいは(21)の関係式

$$\text{が成立する。} \quad d = \frac{-ca_{21}}{a_{12} + cx_3} \quad (20) \quad c = \frac{-da_{12}}{a_{21} + dx_3} \quad (21)$$

4. 一対比較実験

3つの果物「りんご($i=1$)、みかん($i=2$)、バナナ($i=3$)」に対して、7人の被実験者に一対比較実験を行ったところ、3人は $A = A^*$ であり、残り4人は $A \neq A^*$ となった。すなわち、項目 i と項目 j の一対比較時に他項目 k を想定するしない事に影響を受けない者が7人中3人、影響を受ける者が7人中4人、となった。

この4人の中の1人の A と A^* を以下に示す。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (22) \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 1/2 \\ () & 1 & 1/3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

但し、(23)の A^* の(2,1)要素は(1,2)要素との逆比性から、 $2/3$ とした。この例では、 A と A^* は(1,2)要素と(2,1)要素以外は全く同じであり、3節のQDAPの例の定式化等を適用できる。

(22)の A に対する正規化DAPの定常解は(24)で与えられるので、比例定数 c, d は(25)、(26)と推定できる。

$$\text{正規化DAPの定常ウェイトベクトル} = (x_1, x_2, x_3) \cong (0.24, 0.21, 0.55) \quad (24)$$

$$c = 10/11 \cong 0.90909 \quad (25) \quad d = -20/33 \cong -0.60606 \quad (26)$$

5. QDAPの動特性

4節の一対比較実験の一対比較行列データ(22)ならびに(23)について、QDAPの動特性を検討する。但し、(23)の A^* の(1,2)要素 a_{12}^* ($= P$) を0~20の間でパラメータとして変化する。パラメータ A^* の(1,2)要素と(2,1)要素に逆比性を仮定し、 $P = a_{12}^*$ に対する比較定数 c, d を表1に示す。表1において、(24)より $x_3 = 0.55$ とすると c, d は(27)、(28)で与えられる。

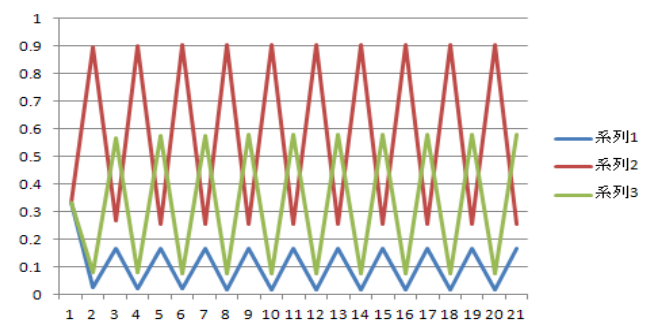
$$c = 20(P-1)/11 \quad (27) \quad d = -c/P \quad (28)$$

又、 $P = 0.01 \sim 0.1$ ならびに $P = 4 \sim 20$ では、定常ウェイト

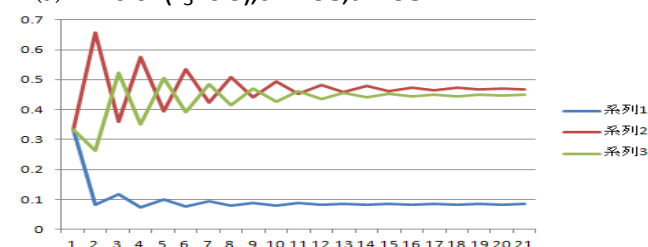
ベクトルでの x_3 が仮定した0.55から乖離したので、 $x_4=0.5$ としたが、その場合に c, d は(29)、(30)であたえら与えられる。

$$c=2(P-1) \quad (29) \quad d=c/P \quad (30)$$

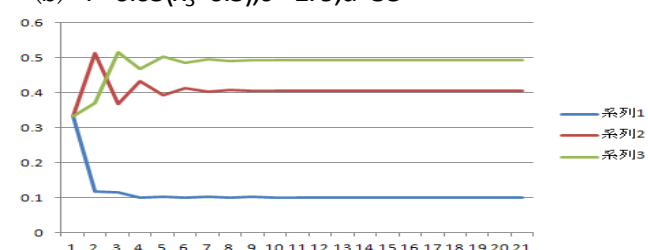
表1の $P=0.01 \sim P=100$ のQDAPの正規化後動特性の一部を図2に示す。



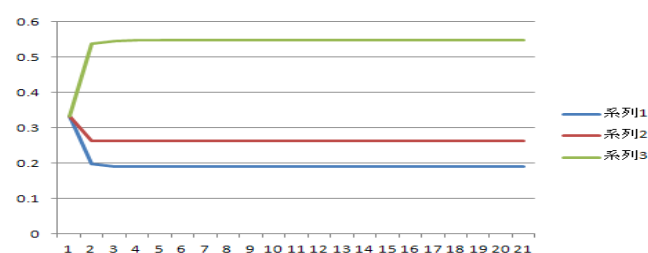
(a) $P=0.01(x_3=0.5), c=-1.98, d=198$



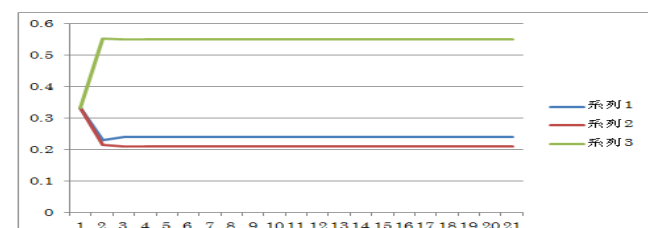
(b) $P=0.05(x_3=0.5), c=-1.9, d=38$



(c) $P=0.1(x_3=0.5), c=-1.8, d=18$



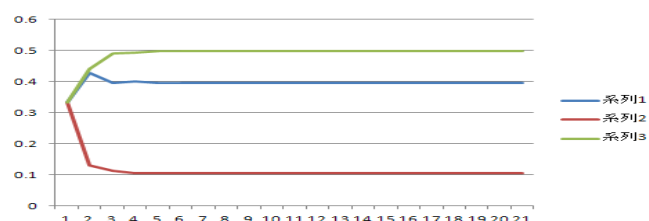
(d) $P=0.5(x_3=0.55), c=-0.909, d=1.8181$



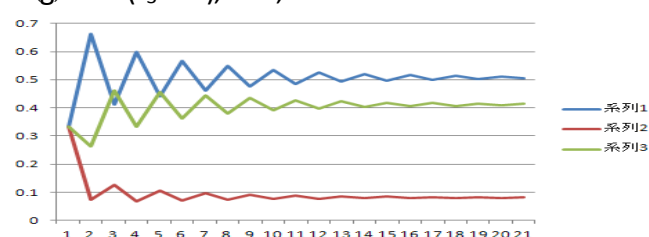
(e) $P=1(x_3=0.55), c=0, d=0$



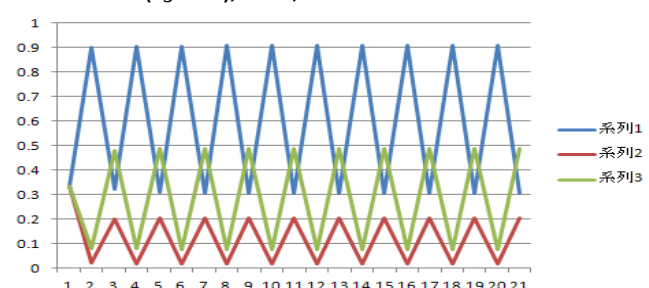
(f) $P=2(x_3=0.55), c=1.8181, d=-0.909$



(g) $P=6(x_3=0.5), c=10, d=-1.6666$



(h) $P=20(x_3=0.5), c=38, d=-1.9$



(i) $P=100(x_3=0.5), c=198, d=-1.98$

図2：QDAP動特性(正規化後ウェイトベクトル)

「コメント1」 表1の $P=4$ 、 $P=6$ において、 c, d の推定時に $x_3=0.55$ と $x_3=0.5$ とした場合の定常ウェイトベクトル収束値を示したが、両者は非常に近似していることがわかる。

「コメント2」 $P=0.05 \sim 10$ では、定常ウェイトベクトルが一定値に収束している。一方、 $P=0$ (正確には0.01)と $P=100$ では、定常ウェイトベクトルが、観察した範囲では、周期2で振動している。

6. おわりに

周期2の振動特性の解明等が今後の課題である。

表 1 : パラメータ $P=a_{12}^*$ に対する比例定数 c, d と Q D A P の定常ウェイトベクトル

$P=a_{12}^*$	比例定数		定常ウェイトベクトル
	c	d	
0.01 ($x_3=0.5$)	-1.98	198	$\begin{pmatrix} 0.019 \\ 0.905 \\ 0.076 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0.169 \\ 0.253 \\ 0.578 \end{pmatrix}$ の間を周期2で振動 ($t=13$ 付近)しつつ、その後収束?
0.05 ($x_3=0.5$)	-1.9	38	$\begin{pmatrix} 0.085 \\ 0.458 \\ 0.457 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0.082 \\ 0.479 \\ 0.439 \end{pmatrix}$ の間を周期2で振動($t=13$ 付近)
0.1 ($x_3=0.5$)	-1.8	18	$\begin{pmatrix} 0.102 \\ 0.405 \\ 0.493 \end{pmatrix}$
0.5 ($x_3=0.55$)	-0.9090	1.8181	$\begin{pmatrix} 0.190 \\ 0.263 \\ 0.547 \end{pmatrix}$
1 ($x_3=0.55$)	0	0	$\begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.21 \\ 0.55 \end{pmatrix}$
1.5 ($x_3=0.55$)	0.9090	-0.6060	$\begin{pmatrix} 0.272 \\ 0.183 \\ 0.545 \end{pmatrix}$
2 ($x_3=0.55$)	1.8181	-0.9090	$\begin{pmatrix} 0.296 \\ 0.164 \\ 0.540 \end{pmatrix}$
4 ($x_3=0.55$)	5.4545	-1.3636	$\begin{pmatrix} 0.354 \\ 0.133 \\ 0.513 \end{pmatrix}$
4 ($x_3=0.5$)	6	-1.5	$\begin{pmatrix} 0.361 \\ 0.121 \\ 0.518 \end{pmatrix}$
6 ($x_3=0.55$)	9.0909	-1.5151	$\begin{pmatrix} 0.389 \\ 0.115 \\ 0.496 \end{pmatrix}$
6 ($x_3=0.5$)	10	-1.6666	$\begin{pmatrix} 0.396 \\ 0.105 \\ 0.499 \end{pmatrix}$
8 ($x_3=0.5$)	14	-1.75	$\begin{pmatrix} 0.421 \\ 0.097 \\ 0.482 \end{pmatrix}$
10 ($x_3=0.5$)	18	-1.8	$\begin{pmatrix} 0.442 \\ 0.091 \\ 0.467 \end{pmatrix}$
20 ($x_3=0.5$)	38	-1.9	$\begin{pmatrix} 0.493 \\ 0.085 \\ 0.422 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0.520 \\ 0.078 \\ 0.402 \end{pmatrix}$ の間を周期2で振動 ($t=13$ 付近)しつつ、収束へ
100 ($x_3=0.5$)	198	-1.98	$\begin{pmatrix} 0.305 \\ 0.205 \\ 0.490 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0.908 \\ 0.017 \\ 0.075 \end{pmatrix}$ の間を周期2で振動 ($t=13$ 付近)しつつ、その後収束?