ISSN 2186-5647

非線形平均化プロセスQDAP一般理論

日大生産工　　○篠原　正明　　情報システム研究所　　篠原　健

1. はじめに

2 次項を考慮した非線形平均化プロセス QDAP(Quadratic Dynamic Averaging Process)の２次項の持つ意味を一般論として解釈する。さらに、３次項以上の非線形項の意味についても考察する。

２．QDAP の定式化

QDAP は一般的には、(1)の更新式で定式化できる。(ベクトル表現式は（2）,（3))。

$x_i(t+1) = \frac{1}{n}\left(\sum_j a_{ij} x_j(t) + \sum_j \sum_k b_{ijk} x_k(t) x_j(t)\right)$　(1)

$x_i(t+1) = \frac{1}{n}(A_{i.}x(t) + x^T(t)B_{i..}x(t))$　(2)

$x(t+1)=\frac{1}{n}(Ax(t) + x^T(t)Bx(t))$　(3)

(1)の右辺を$x_j(t)$で整理すると、(4)あるいは(5)を得る。

$x_i(t+1) = \frac{1}{n}\sum_j(a_{ij} + \sum_k b_{ijk}x_k(t))\, x_j(t)$　(4)

$x_i(t+1) = \frac{1}{n}(A_{i.} + x(t)^T B_{i..})x(t)$　(5)

すなわち、QDAP は等価的、形式的に(6)の時変線形 DAP で表現できる。

$x(t+1)=\frac{1}{n}\tilde{A}(t)x(t)$　(6)　　$\tilde{A}(t) = \{\widetilde{a_{ij}}(t)\}$　(7)

$\widetilde{a_{ij}}(t) = a_{ij} + \sum_k b_{ijk}\, x_k(t) = a_{ij} + x(t)^T B_{ij}.$　(8)

$\tilde{A}(t) = A + x^T(t)B$　(9)

3. 2 次項係数b_{ijk}の解釈

(8)式において、総和記号のΣの添字 k を k≠i,j と k=i,j の場合に分けて総和すると(10)を得る。

$$\widetilde{a_{ij}}(t) = a_{ij} + \sum_k b_{ijk}\, x_k(t)$$

$=a_{ij} + \sum_{k\neq i,j} b_{ijk}\, x_k(t) + \sum_{k=i,j} b_{ijk}\, x_k(t)$　(10)

(10)の右辺第２項は当該一対比較(i,j)以外の項目 k の重み$x_k(t)$が項目対(i,j)間の一対比較に及ぼす影響であり（図１）、一対比較(i,j)の測定時に項目 k を想定するか否かの測定データからからb_{ijk}(k≠ i, j)を推定することができる。一方(10)の右辺第 3 項は当該一対比較(i,j)のどちらかの項目 k(=i あるいは j)が項目対(i,j)間の一対比較に及ぼす影響であり、一対比較(i,j)を測定中,その項目 i,j は共に想定しているわけなので係数b_{ijk}(k=i,j)の解釈とその推定は k≠ i, j の場合ほど単純ではない。

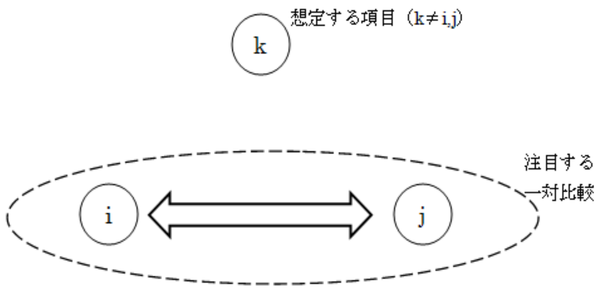

図１項目対(i,j)間の一対比較に及ぼす項目 k の影響

4.　2 次項係数b_{ijk}の推定

(10)の右辺第 2 項の係数b_{ijk}(k≠ i, j)は(i,j)一対比較値に項目 k(k≠ i, j)の重みx_kが及ぼす効果であり、$b_{ijk} > 0 (< 0)$ならばx_k>0 が大きい(項目 k の重要度が高まる)ほど一対比較値は増加(減少)する。それを外部影響係数と呼ぶ。従って, b_{ijk}は一般に(11)により推定することができる。

$b_{ijk} = (a^*_{ij} - a_{ij})/x_k$　(11)

但し、a^*_{ij}:項目 k を意識した時の(i,j)一対比較値　(12)

a_{ij}:項目 i,j のみを意識した時の(i,j)一対比較値　(13)

x_k:項目の定常状態での重み(但し,$\sum x_k(t)$=1 と正規化)

一方、(10)の右辺第 3 項の係数b_{ijk}(k=i あるいは j)は(i,j)一対比較値に当該項目 i か j が及ぼす影響であり(1)においてはx_i^2あるいはx_j^2の 2 乗項として出現する。これを内部影響係数と呼ぶ。前述した通り,(i.j)一対比較測定中は,当然,項目 i と j を想定しているわけなので, a^*_{ij}とa_{ij}は等しく,従って, b_{ijk}=0 とするのが自然な考え方であろう。しかし,以下ではあえてb_{ijk} ≠0 となる以下の状況を考察しょう。すなわち, a^*_{ij}, a_{ij}の測定値の定義(12),(13)を以下の(14),(15)に変更することにより,(11)の推定式をそのまま使用すること

Theory of Nonlinear Averaging Process QDAP
Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

ができる。

a_{ij}^*:項目 k(=i あるいは j)を強く意識した時の(i,j)一対比較値 (14)

a_{ij}:項目 k(=i あるいは j)の重要度を零と見なした時の一対比較値(15)

定義(14),(15)は、2 つの項目,例えば[1]では,りんご(項目 1)とみかん(項目２)の好きな度合を一対比較で測定する時に(具体的には「a_{12} ....りんごをみかんの何倍好きか?」)、「みかんを非常に好きな状況を想定して(強く意識)」あるいはみかんを非常に嫌いな状状況を想定して(重要度を零) 」、りんごとみかんの一対比較アンケートに答えることを要請している。

なお、(11)においてx_kは定常状態での重みとしたが、振動など定常値が一意に定まらない場合も存在する([1]参照)。従って(11)と正規化条件$\sum x_k(t)=1$を(1)(あるいは(2),(3))と連立させたQDAPが厳密アプローチとなる。

５．n=3 の一般論

(1)を n=3 の場合に書き下すと(16)となる。

$$x_i(t+1)=\frac{1}{3}(a_{i1}x_1(t)+a_{i2}x_2(t)+a_{i3}x_3(t)+b_{i11}x_1(t)^2+b_{i12}x_1(t)x_2(t)+b_{i13}x_1(t)x_3(t)+b_{i21}x_2(t)x_1(t)+b_{i22}x_2(t)^2+b_{i23}x_2(t)x_3(t)+b_{i31}x_3(t)x_1(t)+b_{i32}x_3(t)x_2(t)+b_{i33}x_3(t)^2 \quad i=1,2,3 \tag{16}$$

内部影響係数を零とすると、(16)において、$b_{i11}=b_{i22}=b_{i33}=0$ なる。さらに$b_{112}=b_{212}=b_{113}=b_{313}=b_{121}=b_{221}=b_{223}=b_{323}=b_{131}=b_{331}=b_{232}=b_{332}=0$なので、i=1,2,3 の場合について(16)を書くと(17)～(19)となる。但し,ここで,b_{iik}(i≠k)は自己評価外部影響係数であるが零とした。

$$x_1(t+1)=\frac{1}{3}(a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+a_{13}(t)x_3(t)+b_{123}x_2(t)x_3(t)+b_{132}x_3(t)x_2(t) \tag{17}$$

$$x_2(t+1)=\frac{1}{3}(a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+a_{23}(t)x_3(t)+b_{213}x_1(t)x_3(t)+b_{231}x_3(t)x_1(t) \tag{18}$$

$$x_3(t+1)=\frac{1}{3}(a_{31}x_1(t)+a_{32}x_2(t)+a_{33}(t)x_3(t)+b_{312}x_1(t)x_2(t)+b_{321}x_2(t)x_1(t) \tag{19}$$

これより、例えばb_{123}とb_{132}は共にx_2x_3の係数であり、(17)でのx_1更新に与える効果は同じある。一般論では、b_{ijk}とb_{ikj}は共にx_jx_kの係数であり、x_i更新に与える効果は同じと言える。但し「a_{12}^*とa_{21}^*」(あるいは「a_{13}^*とa_{31}^*」)の間に逆比性が成立する等の条件が課されるので「b_{123}とb_{213}」(あるいは「b_{132}とb_{312}」はその値を相互に融通する自由度はない。

６．n>3 の一般論

内部影響係数ならびに自己評価外部影響係数と共に零にするならば,(1),(8)は(20),(21)となる。

$$x_i(t+1)=\frac{1}{n}(\sum_j a_{ij}x_j(t)+\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i,j} b_{ijk}x_k(t)x_j(t) \quad (i=1,\ldots\ldots n) \tag{20}$$

$$\widetilde{a_{ij}}=a_{ij}+\sum_{k\neq i,j} b_{ijk}x_k \quad \text{for } j\neq i$$
$$a_{ij} \quad \text{for } j=i \tag{21}$$

（21）よりわかるように、i≠ jの$\widetilde{a_{ij}}$は、a_{ij}に k≠ i, j となる(すなわち、i,j,k が異なる組み合わせの)$b_{ijk}x_jx_k$の項を加えて得られる。従って、x_k=0(k∈ S)とした(すなわち,項目k(k∈ S)を無視した)時の(i,j)一対比較測定値を$a_{ij}^*(x_k=0|k\in S)$とすれば、(22)の成立が望まれる。

$$a_{ij}^*(x_k=0|k\in S)=a_{ij}+\sum_{k\in S} b_{ijk}x_k \tag{22}$$

|S|=1 に限定すれば,a_{ij}^*とa_{ij}の測定値より,[1]と同様の手順により、b_{ijk}を推定できるが、|S|=2,|S|=3,......の場合も考慮して、最小自乗法などにより推定するのが厳密アプローチである。

７．3 次項の考慮

(21)の j≠ iの場合に 3 次項($\widetilde{a_{ij}}$としては 2 次項)を考慮すると,(23)となる。

$$\widetilde{a_{ij}}=a_{ij}+\sum_{k\neq i,j} b_{ijk}x_k+\sum_{k_1,k_2} b_{ijk1k2}x_{k1}x_{k2} \tag{23}$$

右辺第 2 項で出現するb_{ijk}は項目 k のみを想定する場合の影響で、右辺第 3 項で出現するb_{ijk1k2}は項目k_1と項目k_2の2 つの項目を同時に想定する場合の影響を表現している。なお、b_{ijk1}とb_{ijk2}は右辺第 2 項で出現するが、これらは項目k_1とk_2を独立に想定した場合の影響であり、b_{ijk1k2}とは異なる。

８．おわりに

一般的な非線形DAP:x(t+1)=F(x(t))を２次項までTaylor展開近似した場合を議論した。一般的な非線形DAPの動力学的考察等は今後の課題である。

参考文献

［１］篠原正明、篠原健：非線形平均化プロセスＱＤＡＰの実験例、平成24年度日本大学生産工学部第45回学術講演会講演論文集(2012. 12).