

## 同次化・補正の再帰解法の行列理論

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

篠原 健

### 1. はじめに

連立一次方程式(あるいは線形連立方程式)  $Ax = b$  を解くアルゴリズムとして、文献[1]において「同次化・補正の再帰解法」とでも呼ぶべき方法を提案した。本論文では、その提案手法の行列理論(matrix theory)を展開し、それにもとづき、3の研究課題を考察する。

### 2. 行列理論

$n$ 変数の連立一次方程式(1)を考えよう。

$$Ax = b \quad (1)$$

$A : n \times n$  の係数行列,  $x : n \times 1$  の列ベクトル,

$b : n \times 1$  の列ベクトル

係数行列  $A$  を変数  $\{x_1 \dots x_m\}$  と  $\{x_{m+1} \dots x_n\}$  に対応して、(2)に示すように分割表現すると、(1)は(3)となる。

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$A_{11} : m \times m$ ,  $A_{22} : n - m \times n - m$  の部分正方行列

$A_{12} : m \times n - m$ ,  $A_{21} : n - m \times m$  の部分行列

但し、(3)式中の  $x_1$  は  $\{x_1 \dots x_m\}$ 、 $x_2$  は  $\{x_{m+1} \dots x_n\}$  を成分とする列ベクトルである。なお、混同の心配がない限りベクトルの  $x_1$  とベクトル  $x$  の第1要素の  $x_1$  と同記号を使用する。

(3)式において、 $b_2 = 0$  ならば、(4)、(5)となる。

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \quad (4)$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = 0 \quad (5)$$

すなわち、(6)、(7)を得る。(逆行列の存在は仮定)。

$$A_{22}x_2 = -A_{21}x_1 \quad (6)$$

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 = b_1 \quad (7)$$

$m$ 元連立1次方程式(7)を解き、 $x_1$ を確定後に  $n - m$ 元連立1次方程式(6)を解き、 $x_2$ を確定する。これにより、 $n$ 元連立1次方程式(1)を一般的には解くことができるが、 $m = 1$ の

特別な場合を以下に考察しよう。

[ $m = 1$ の場合]

$x_1 = \{x_1\}$  なので、例えば  $x_1(\text{暫}) = 1$  と暫定的に決めても、 $x_1$ の真の解  $x_1(\text{真})$ (現時点では未知)とは定数  $K$  倍(0倍も含む)の関係にある。  $x_1(\text{真}) = Kx_1(\text{暫})$  (8)

$x_1 = 1$  を(6)に代入すると、(9)を得る。

$$A_{22}x_2 = -A_{21} \quad (9)$$

(9)は  $n - 1$ 元連立1次方程式であり、原問題(1)より次元が1つ小さい問題を解けばよい。(9)の解を  $x_2(\text{暫})$  とする。

$$x_2(\text{暫}) = -A_{22}^{-1}A_{21} \quad (10)$$

すなわち、 $x_1(\text{暫})$  と  $x_2(\text{暫})$  からなる暫定解  $x(\text{暫})$  を得る。

$$x(\text{暫}) = \begin{pmatrix} x_1(\text{暫}) \\ x_2(\text{暫}) \end{pmatrix} \quad (11)$$

この暫定解  $x(\text{暫})$  が(4)を満足すれば、(5)はすでに満たしているの、原問題の(1)の解となる。そこで、(4)の左辺に  $x(\text{暫})$  を代入して、その値を計算する。

$$(4) \text{の左辺計算値} = A_{11}x_1(\text{暫}) + A_{12}x_2(\text{暫}) \quad (12)$$

この左辺値が(4)の右辺値  $b_1$  にもし等しいならば、 $x(\text{暫})$  は真解であるが、一般には、左辺計算値  $\neq$  右辺値  $b_1$  (13)。そこで、ベクトル  $x(\text{真})$  をベクトル  $x(\text{暫})$  に補正係数(スカラー値)  $K$  を乗じることにより補正する。

$$x(\text{真}) = Kx(\text{暫}) \quad (14)$$

$K = b_1 / (4) \text{の左辺計算値}$

$$= b_1 / (A_{11}x_1(\text{暫}) + A_{12}x_2(\text{暫})) \quad (15)$$

(14)、(15)の補正処理が可能なのは、(8)式に示したように  $m = 1$  だからであり、 $m > 2$  ではこのように単純な補正処理はできない。

(9)式の  $n - 1$ 元連立1次方程式を新たな問題  $Ax = b$  とみなし、右辺  $b$  の第2要素以降を零化(「部分同次化」)し、 $Ax = b$  の第1式による「補正処理」を行うことにより、さらに次元の小さな問題へと帰着する。このように再帰的に「部分同次

化(右辺零化)」と「補正処理」をくり返すことにより、連立1次方程式を解くので「同次化・補正の再帰解法」と呼ぶ。

### 3. 考察

#### 3. 1 $m > 1$ の場合への展開

$m = 1$  の場合は(4)式が1本の線形方程式となり、従って、任意の定数スカラー値を、 $x_1$  (暫)として暫定的に与えることにより(普通は $x_1$  (暫) = 1)、次元数が1つ減少した連立1次方程式の解に帰着し、その解に(15)の補正処理(単純な割り算(あるいは乗算))を適用できた。それでは $m > 1$ 、例えば $m = 2$ 、では以上の議論はどうなるであろうか?

$m = 2$  では $x_1$  は次元  $2 \times 1$  の列ベクトルであり、(8)式の成立が期待できないので暫定値を、例えば(16)のような定

$$\text{数ベクトルであたえることはできない。 } x \text{ (暫)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

(8)式の関係が保持できるためには、(17)のようなパラ

$$\text{メタ } p \text{ を持つ2元ベクトルが必要となる。 } x \text{ (暫)} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \quad (17)$$

しかしながら、(17)を採用すると、(6)式は(18)、(19)となり、結局、変数の数は1つしか減少せず、 $m = 1$  の場合とほぼ同じ結果となる。

$$A_{22} x_2 = -A_{21} x_2 \text{ (暫)} = - \left( A_{21}(1), A_{21}(2) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$A_{22} x_2 + A_{21}(2)p = -A_{21}(1) \quad (19)$$

#### 3. 2 非線形方程式への展開

$n$  変数  $s$  式の非線形方程式(20)あるいは(21)への適用を以下に考察する。

$$g(x) = 0 \quad (20)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, \dots, s \quad (21)$$

非線形の要素が少しでも存在すると補正処理が機能しない。従って、再帰的な部分と補正処理は非線形方程式では適応できない。そこで、残った部分同次化(同次一次方程式)の適用を以下に検討する。

$s$  個の方程式を  $j = 1, \dots, m$  の非線形部分(22)と  $j = m+1, \dots, s$  の線形部分(23)に分割する。

$$f(x) = 0 \quad (22) \quad Ax = 0 \quad (23)$$

(23)式は右辺零の同次方程式である。右辺が非零ならば、右辺の第2要素以降を零化(「部分同次化」)し、右辺非零の第1番目の方程式を非線形部分(22)に含めて考える。

同次方程式(23)の非自明解を  $x(1), \dots, x(t)$  とする(自

由度  $t$ )。すると、(23)の一般解は(24)、(25)となる。(25)を(22)に代入すると(26)となり、変数  $y$  の非線形方程式に帰着する。

$$x = \sum y(i)x(i) \quad (24) \quad x = Xy \quad (25) \quad f(Xy) = 0 \quad (26)$$

あるいは、同じ事であるが、(23)を(27)で分割表現し、 $A_2^{-1}$  の存在を仮定し、整理すると、(28)、(29)、(30)となる。

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0 \quad (27) \quad x_2 = -A_2^{-1} A_1 x_1 \quad (28)$$

$$x = \begin{pmatrix} I \\ -A_2^{-1} A_1 \end{pmatrix} x_1 \quad (29) \quad f = (Yx_1) \quad (30)$$

ここで、(25)と(29)が対応する。

すなわち、逆行列  $A_2^{-1}$  あるいは(23)の非自明解を計算する必要があるが、次元の小さくなった  $x_1$  あるいは  $y$  を変数とする非線形方程式(30)あるいは(26)の解に帰着する。

#### 3. 3 同次化処理を不要とする場合

既存の解法アルゴリズム(ガウス消去法, 等)と計算手間を比較すると、ほとんど同程度であるが、同次化処理を不要とする係数行列の場合には計算手間が補正処理だけとなり、大幅な計算量削減が期待できる。

(9)式において、右辺のサイズ  $n-1 \times 1$  の列ベクトル  $A_{21}$  が(31)のパターンを持つとすると、新たな  $n-1$  元一次方程式(9)は同次化処理(右辺の第2要素以降の零化)をする必要がなく、そのままより次元の小さな問題に帰着できる。

$$A_{21} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

但し、 $A_{21}$  の第1要素\*は非零で、第2要素以降が零である。同様に再帰的適用を考えると、連立1次方程式  $Ax = b$  の係数行列  $A$ 、右辺定数ベクトル  $b$  が最初から(32)、(33)の構造(一種の疎構造)を持てば、同次化処理は不要で、補正処理を再帰的にくり返すことにより連立1次方程式が求解できる。

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & \text{非零} \\ * & * & * & & * \\ & * & \cdot & & * \\ & & \cdot & \cdot & * & * \\ & & & * & * & * \\ \text{零} & & & & * & * \end{pmatrix} \quad (32) \quad b = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

(32)の構造は、(34)で表現でき、「対角要素  $a_{i,i}$  の2つ下の要素  $a_{i+2,i}$  以降の要素は零 ( $i = 1, \dots, n$ )」と言える。

但し、(32)で\*は非零要素である。

$$a_{i+2,i}=0, a_{i+3,i}=0, a_{i+4,i}=0, \dots, a_{n,i}=0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (34)$$

[例1] 4元連立1次方程式の例

(35)の連立1次方程式の係数行列は(32)の構造を持つので、補正処理のみの再帰解法により解が求まる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

(ステップ1) (35)の第1式(36)において、暫定解  $x_1(0)=1$  としよう。

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \quad (36)$$

(ステップ2) (32)における  $A_{21}$  は(37)なので、新たな連立1次方程式(38)を得る。

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (37) \quad \begin{pmatrix} 321 \\ 231 \\ 011 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

(38)の第1式(39)において、 $x_2(0)=1$  としよう。

$$3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \quad (39)$$

(ステップ3) (38)における  $A_{31}$  は(40)なので、新たな連立1次方程式(41)を得る。

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

(41)の第1式(42)において、 $x_3(0)=1$  としよう。

$$3x_3 + x_4 = -2 \quad (42)$$

(41)の第2式(43)より、 $x_4(0)=-1$  となる。

$$x_3 + x_4 = 0 \quad (43)$$

(ステップ4) 暫定解  $\{x_3(0)=1, x_4(0)=-1\}$  について(42)の左辺値を計算し、補正係数Kを計算する。

$$K = (42) \text{の右辺値} / (42) \text{の左辺式計算値} = -1 \quad (44)$$

$$\text{補正暫定解: } x_3(1) = -1, x_4(1) = 1 \quad (45)$$

(ステップ5) 暫定解  $\{x_2(0)=1, x_3(1)=-1, x_4(1)=1\}$  について(39)の左辺値を計算し、補正係数Kを計算。

$$K = (39) \text{の右辺値} / (39) \text{の左辺式計算値} = -0.5 \quad (46)$$

$$\text{補正暫定解: } x_2(2) = -0.5, x_3(2) = 0.5, x_4(2) = -0.5 \quad (47)$$

(ステップ6) 暫定解  $\{x_1(0)=1, x_2(2)=-0.5, x_3(2)=0.5, x_4(2)=-0.5\}$  について(36)の左辺値を計算し、補正係数Kを計算。

$$K = (36) \text{の右辺値} / (36) \text{の左辺式計算値} = -2.0 \quad (48)$$

$$\text{補正暫定解: } x_1(3) = -2.0, x_2(3) = 1.0, x_3(3) = -1.0, x_4(3) = 1.0 \quad (49)$$

この補正解  $x(3)$  が問題(35)の解である。

[例2] 4状態マルコフ連鎖の例

確率行列P(50)を持つ4状態マルコフ連鎖(図1)の定常状態確率  $x$  は、平衡方程式(51)と正規化方程式(52)からなる連立1次方程式の解である。

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$x = P^T x \quad (51)$$

$$1^T x = 1 \quad (52)$$

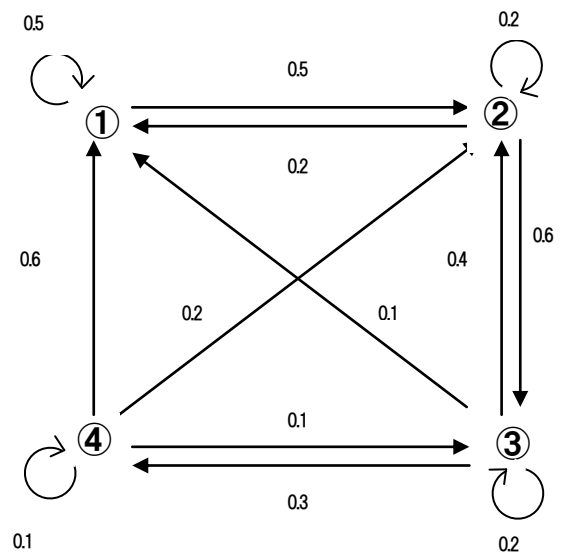


図1：4状態マルコフ連鎖の状態遷移図

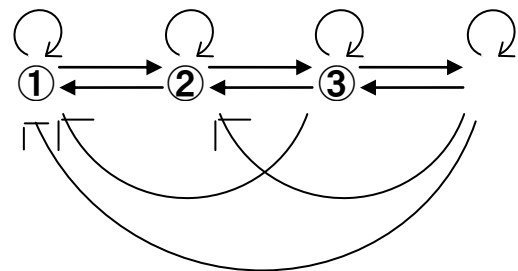


図2：直線上に状態を並べた状態遷移図

(非零確率遷移枝のみを表示)

(51)式は(53)式となるので、同次方程式であり、(51)の第1式を(52)に置き換えると、(54)の連立1次方程式を得る。

$$(P^T - I)x = 0 \quad (53)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & -0.8 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & -0.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.3 & -0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

(54)の左辺係数行列は(32)の構造を持つので、補正処理の

みの再帰解法により解が求まる。

なお、状態番号順に直線上に並べた状態遷移図を図2に示すが、2ステップ以上の昇順方向の遷移を許容しないマルコフ連鎖として特徴付けられる。このトポロジック特徴付けは、係数行列 $A = \{a_{ij}\}$ を確率行列 $P = \{p_{ij}\}$ の転置行列に対応させれば同様に可能である。

(ステップ1)

(54)の第1式(55)において、 $x_1(0) = 1$ としよう。

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad (55)$$

(ステップ2)新たな連立1次方程式(56)を得る。

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & -0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & -0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

(56)の第1式(57)において、 $x_2(0) = 1$ としよう。

$$-0.8x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4 = -0.5 \quad (57)$$

(ステップ3)新たな連立1次方程式(57)を得る。

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.1 \\ 0.3 & -0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

(57)の第1式(58)において、 $x_3(0) = 1$ としよう。

$$-0.8x_3 + 0.1x_4 = -0.6 \quad (58)$$

(57)の第2式(59)より、 $x_4(0) = 1/3$ となる。

$$0.3x_3 + 0.9x_4 = 0 \quad (59)$$

(ステップ4)暫定解 $\{x_3(0) = 1, x_4(0) = 1/3\}$ について(58)の左辺値を計算し、補正係数Kを計算する。

$K = (58) \text{の右辺値} / (58) \text{の左辺式計算値}$

$$= -0.6 / (-0.8 + 0.1 + 1/3) = 18/23 \quad (60)$$

$$\text{補正暫定解: } x_3(1) = 18/23, x_4(1) = 6/23 \quad (61)$$

(ステップ5)暫定解 $\{x_2(0) = 1, x_3(1) = 18/23, x_4(1) = 6/23\}$ について(57)の左辺値を計算し、補正係数Kを計算する。

$$K = (57) \text{の右辺値} / (57) \text{の左辺式計算値} = (-0.5) / (-0.8 + 0.4 \times 18/23 + 0.2 \times 6/23) = 23/20 \quad (62)$$

$$\text{補正暫定解: } x_2(2) = 1.15, x_3(2) = 0.9, x_4(2) = -0.3 \quad (63)$$

(ステップ6)暫定解 $\{x_1(0) = 1, x_2(2) = 1.15, x_3(2) = 0.9, x_4(2) = -0.3\}$ について(55)の左辺値を計算し、補正係数Kを計算する。

$K = (55) \text{の右辺値} / (55) \text{の左辺式計算値}$

$$= 1 / (1 + 1.15 + 0.9 + 0.3) = 20/67 \quad (64)$$

$$\text{補正暫定解: } x_1(3) = 20/67, x_2(3) = 23/67, x_3(3) = 18/67, x_4(3) = 6/67 \quad (65)$$

この補正解 $x(3)$ が問題(54)の解である。

#### 4. おわりに

「同次化・補正の再帰解法」の行列(matrix)理論を展開し、それにもとづき、分割法の一般化(2.1節)、非線形方程式への一般化(2.2節)を検討したが、線形方程式でかつ「1変数と他の残り変数群への分割」がアルゴリズム上で本質的であることを考察した。

又、同次化操作を全く不要とする係数行列Aの疎構造を明らかにし、その場合には計算手間が大幅に減少することを例題を通して示した(3.3節)。なお、この場合には、 $Ax = b$ において、まず $x_n = 1$ と暫定的に置き、 $Ax = b$ の第n式より $x_{n-1}$ を計算し、次に第n-1式より $x_{n-2}$ を計算し、 $\dots$ 、最後に第1式により補正処理をして、 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ を求める方法がより直接的(かつ、効率的?)なアルゴリズム(これを、『部分同次化後・後退逐次代入法』と呼ぶ)として考えられるが、提案する一般的な場合の「同次化・補正の再帰解法」への組み込みなどは今後の検討課題とする。

なお、[2](p.13)では、本解法「同次化・補正の再帰解法」がパス代数上での最短経路算法のダイクストラ法と類似していることから、「連立1次方程式のダイクストラ流解法」とも呼んだが、本解法「同次化・補正の再帰解法」の一般のパス代数への適用などは今後の課題である。

#### 参考文献

[1] 篠原正明, 篠原 健: 線形連立方程式の正規化解法とマルコフ連鎖への応用, 第38回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会, pp. 79-82 (2005.12).

[2] 篠原正明: エクセル・数理計画法(2011.4).