

不完全LLS解の幾何平均公式とトポロジー公式

日大生産工

○篠原 正明

(一財)計量計画研究所

茂木 渉

1. はじめに

茂木[1]によるAHP一対比較行列の不完全情報下の対数最小2乗 (LLS) 解の幾何平均公式と篠原[2, 3, 等]によるLLS解のトポロジー公式の関連性について考察する。すでに得られているトポロジー公式の、幾何平均公式の視点からの再導出を試み、それが系統的に可能であることを確認した。又、幾何平均公式にもとづき既存のトポロジー公式を拡張する形で、2, 3の新しいトポロジー公式を導出した。さらに、仮想一対比較値の一般トポロジー公式が満足すべき性質を考察する。

2. 不完全情報LLS解の幾何平均公式 (1)

文献[1]の(22)式より、項目数 $=n$ の一対比較デザイングラフにおける不完全情報LLS解の項目 k の重み w_k は(1)式で与えられる。

$$w_k = \sqrt[n]{a_{kk} \cdot \prod_{j \in E(k)} a_{kj} \cdot \prod_{j \in \bar{E}(k)} \frac{w_k}{w_j}} \quad (k=1, \dots, n) \quad (1)$$

但し、 a_{kj} は項目 (k, j) 間の一対比較値である。新たに(2)式の記号 w_{kj} を導入し、 k も $E(k)$ に含めると(1)式は(3)式となる。

$$w_{kj} = \frac{w_k}{w_j} \quad (2)$$

$$w_k = \sqrt[n]{\prod_{j \in E(k)} a_{kj} \cdot \prod_{j \in \bar{E}(k)} w_{kj}} \quad (k=1, \dots, n) \quad (3)$$

さらに、 α_{kj} を(4)式で定義すれば、(1)式は(5)式となる。

$$\alpha_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & j \in E(k) \\ w_{kj} & j \in \bar{E}(k) \end{cases} \quad (4)$$

$$w_k = \left(\prod_{j=1}^n \alpha_{kj} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (k=1, \dots, n) \quad (5)$$

すなわち、欠落枝 (k, j) に関しては(2)式で定義される w_{kj} を暫定的な仮想一対比較値とすることにより、完全情報下のLLS解幾何平均公式が不完全情報下の重み推定法にも形式上そのまま適用できる、と言える。

3. 幾何平均公式のトポロジー解釈

項目 k の重み w_k に関する完全情報下のLLS解・幾何平均公式についてのトポロジー解釈は、「デザイングラフの節点 k から出る有向枝(自己閉路を含む)に対応する一対比較値 a_{kj} ($k=1, \dots, n$)、すなわち、節点 k から1ステップでの一対比較値の幾何平均」と言える。

不完全情報下においても、欠落枝 (k, j) に関しては(2)式で定義される w_{kj} (未知数)を暫定的な仮想一対比較値とすれば、同様のトポロジー解釈が成立する。但し、 w_{kj} は未知数であるので、陽にはその値は定まらない。従って、不完全情報下のLLS解では、欠落枝 (k, j) の仮想一対比較値を定めることが課題となる。

4. 仮想一対比較値の一般トポロジー公式

準備として、 n 節点完全グラフから1枝 (k, j) のみ欠落(開放除去)したデザイングラフを考えると、その欠落枝 (k, j) の仮想一対比較値 w_{kj} は(6)式で与えられる([2]の(26))。

$$w_{kj} = \left(\prod_{i \neq k, j} a_{ki} a_{ij} \right)^{\frac{1}{n-2}} \quad (6)$$

すなわち、節点 k から節点 j への $n-2$ 本の2ステップパスについての比較値の積 $a_{ki} a_{ij}$ ($i \neq k, j$)の幾何平均値である。ところが、(6)式の「2ステップパス積の幾何平均」のトポロジー公式は、完全グラフから1枝欠落した場合に限定されず任意の欠落要素を持つデザイングラフに対して、同様な形式で一般トポロジー公式(7)として成立する。

[定理1 (一般トポロジー公式)]

$$w_{kj} = \left(\prod_{i \neq k, j} \alpha_{ki} \alpha_{ij} \right)^{\frac{1}{n-2}} \quad (7)$$

但し、 α_{kj} 等は(4)式で定義される。□

(証明) (5)式より、(8),(9)が成立する。

$$w_k = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_{ki} \right)^{\frac{1}{n}} = \left[\left(\prod_{i \neq j} \alpha_{ki} \right) \cdot w_{kj} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (8)$$

$$w_j = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_{ji} \right)^{\frac{1}{n}} = \left[\left(\prod_{i \neq k} \alpha_{ji} \right) \cdot w_{jk} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (9)$$

(8)式と(9)式を(2)式に代入すると、(10)式が成立する。

$$w_{kj} = \frac{w_k}{w_j} = \left[\frac{\left(\prod_{i \neq j} \alpha_{ki} \right) \cdot w_{kj}}{\left(\prod_{i \neq k} \alpha_{ji} \right) \cdot w_{jk}} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (10)$$

α と w に関する逆比性と $\alpha_{kk} = \alpha_{jj} = 1$ を仮定すると、(10)式は(11)式となる。

$$w_{kj} = \left(\prod_{i \neq k, j} \alpha_{ki} \alpha_{ij} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot (w_{kj})^{\frac{2}{n}} \quad (11)$$

従って、(7)式の「仮想一対比較値に対する2ステップパス積の幾何平均」の一般トポロジー公式を得る。

【証明終わり】

定理1の一般トポロジー公式が意味することは、『任意のデザイングラフ（項目数= n ）において（…と言っても、木（トリ）以上の連続性は仮定する）、欠落枝（ k, j ）の仮想一対比較値 w_{kj} は、欠落枝をも含めた完全グラフでの $k \rightarrow j$ 間の $n-2$ 本の2ステップパス集合「 $k \rightarrow 1 \rightarrow j, k \rightarrow 2 \rightarrow j, \dots, k \rightarrow i \rightarrow j (i \neq k, j), \dots, k \rightarrow n \rightarrow j$ 」の各一対比較値積 $\alpha_{ki} \alpha_{ij} (i \neq k, j)$ の幾何平均である』。

ここで、 $\alpha_{ki} \alpha_{ij} (i \neq k, j)$ が実測枝に対応すれば、実測枝の2ステップパスの積重みとなるが、 α_{ki}, α_{ij} （あるいはその一方）が欠落枝の場合には、(4)式より w_{ki}, w_{ij} が含まれる。従って、仮想一対比較値 w_{kj} の決定は一連の非線形連立方程式(12)の解となる。

$$w_{kj} = \left(\prod_{i \neq k, j} \alpha_{ki} \alpha_{ij} \right)^{\frac{1}{n-2}} \quad (k \neq j) \quad (12)$$

5. 仮想一対比較値の一般トポロジー公式の適用例

定理1の一般トポロジー公式を適用して、非線形連立方程式を解くことにより、仮想一対比較値を求めてみよ

う。欠落枝（ k, j ）が1本の場合には、定理1の(7)式の右辺の α が全て a であり、直接 w_{kj} が得られる([2]の3.1節(26)式)。以下で、[2]の3章で導出したトポロジー公式を、定理1の一般トポロジー公式にもとづき再導出・一般化・拡張する。

5.1. 長さ2の鎖が欠落した場合（[2]の3.2節の図4）

項目数 = 5の完全グラフで枝(1, 2), (2, 3)の長さ2のパス（鎖）が欠落した場合を考えると、 w_{12}, w_{23} に関して一般トポロジー公式を適用して(13),(14)式が成立する。

$$w_{12} = \{(a_{13}w_{32})(a_{14}w_{42})(a_{15}w_{52})\}^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

$$w_{23} = \{(a_{21}w_{13})(a_{24}w_{43})(a_{25}w_{53})\}^{\frac{1}{3}} \quad (14)$$

逆比性 $w_{12} = w_{21}^{-1}$ 、 $w_{23} = w_{32}^{-1}$ を考慮すれば、(13), (14) は2変数 w_{12}, w_{32} に関する非線形連立方程式である。 $v = \log w, b = \log a$ と対数変換すると、(13), (14)は(15), (16)の連立1次方程式となる。

$$v_{12} = \frac{1}{3} \{(b_{13} + v_{32}) + (b_{14} + b_{42}) + (b_{15} + b_{52})\} \quad (15)$$

$$v_{32} = \frac{1}{3} \{(v_{12} - b_{13}) - (b_{24} + b_{43}) - (b_{25} + b_{53})\} \quad (16)$$

(16)の v_{32} を(15)の右辺に代入し、 v_{12} について解き、整理すると、(17)を得る。

$$v_{12} = \frac{1}{8}(b_{13} + b_{34} + b_{42}) + \frac{1}{8}(b_{13} + b_{35} + b_{52}) + \frac{3}{8}(b_{14} + b_{42}) + \frac{3}{8}(b_{15} + b_{52}) \quad (17)$$

w と α に戻すと、(18)を得る。

$$w_{12} = (a_{13}a_{34}a_{42})^{\frac{1}{8}}(a_{13}a_{35}a_{52})^{\frac{1}{8}}(a_{14}a_{42})^{\frac{3}{8}}(a_{15}a_{52})^{\frac{3}{8}} \quad (18)$$

すなわち、欠落枝(1, 2)の仮想一対比較値 w_{12} は、節点1から2への、2つの3ステップパス「 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ 」, 「 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ 」と2つの2ステップパス「 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ 」, 「 $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ 」の一対比較値の経路積を「1:1:3:3」の比率での重み付き幾何平均値となる。

次に、同様の手順により求めた、項目数 = n の完全グラフで枝(1, 2), (2, 3)が欠落した場合の w_{12} の結果を以下に示す。

$$w_{12} = (a_{13}a_{34}a_{42})^p(a_{13}a_{35}a_{52})^p(a_{13}a_{36}a_{62})^p \cdots (a_{13}a_{3n}a_{n2})^p \times (a_{14}a_{42})^q(a_{15}a_{52})^q(a_{16}a_{62})^q \cdots (a_{1n}a_{n2})^q \quad (19)$$

$$p = \frac{1}{(n-2)^2 - 1}, \quad q = \frac{n-2}{(n-2)^2 - 1} \quad (20)$$

(19)式において、3ステップパスの経路積は $n-3$ 個（重み比率は p ）で、2ステップパスの経路積は $n-3$ 個（重み比率は q ）ある。例えば、 $n=5$ では、2個の3ステップパスと2個の2ステップパスの重み比率は、 $1/8:1/8:3/8:3/8$ 、 $n=6$ では、3個の3ステップパスと3個の2ステップパス重み比率は、 $1/15:1/15:1/15:4/15:4/15:4/15$ 、 $n=7$ では、4個の4ステップパスと4個の2ステップパス重み比率は、 $1/24:1/24:1/24:1/24:5/24:5/24:5/24:5/24$ 、である。 n の増加と共に1つの3ステップパス重み比率は1であるが、1つの2ステップパス重み比率は $n-2$ と、両者の差は開く傾向にある。

5.2. 三角形が欠落した場合（[2]の3.3節の図5）

項目数 = 5の完全グラフで枝(1, 2), (2, 3), (1, 3)の三角形が欠落した場合を考えると、 w_{12}, w_{23}, w_{13} に関して、一般トポロジー公式を適用して、(21),(22),(23)が成立する。

$$v_{12} = \frac{1}{3} \{ (v_{13} + v_{32}) + (b_{14} + b_{42}) + (b_{15} + b_{52}) \} \quad (21)$$

$$v_{32} = \frac{1}{3} \{ (v_{21} - v_{13}) + (b_{24} + b_{43}) + (b_{25} + b_{53}) \} \quad (22)$$

$$v_{13} = \frac{1}{3} \{ (v_{12} + v_{23}) + (b_{14} + b_{43}) + (b_{15} + b_{53}) \} \quad (23)$$

(23)を変形すると、(24)を得る。

$$\frac{2}{3}v_{12} = \frac{1}{3} \{ (v_{13} + v_{32} + v_{21}) + (b_{14} + b_{42}) + (b_{15} + b_{52}) \} \quad (24)$$

ここで、任意の閉路に沿っての v の和は零（あるいは w の積は1）なので、 $v_{13} + v_{32} + v_{21} = 0$ を(24)式に代入すると、(25),(26)を得る。

$$v_{12} = \frac{1}{2} \{ (b_{14} + b_{42}) + (b_{15} + b_{52}) \} \quad (25)$$

$$w_{12} = \{ (a_{14}a_{42})(a_{15}a_{52}) \}^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

同様に、(27),(28)を得る。

$$w_{23} = \{ (a_{24}a_{43})(a_{25}a_{53}) \}^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

$$w_{13} = \{ (a_{14}a_{43})(a_{15}a_{53}) \}^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

すなわち、項目数 = 5の完全グラフから三角形が欠落し

た場合に、欠落枝の仮想対比較値は2つの「実測値からなる2ステップパス」の経路積の1:1重み比率の幾何平均となる。さらに、一般化して、項目数 = n の完全グラフから、大きさ m の（節点1, 2, ..., m より構成される）部分完全グラフが欠落したデザイングラフ（ $n > m$ ）における欠落枝(1, 2)の w_{12} を以下に求める。

w_{12} に一般トポロジー公式を適用すると、(29)を得る。

$$v_{12} = \frac{1}{n-2} \{ (v_{13} + v_{32}) + (v_{14} + v_{42}) + \cdots + (v_{1m} + v_{m2}) + \{ (b_{1,m+1} + b_{m+1,2}) + (b_{1,m+2} + b_{m+2,2}) + \cdots + (b_{1n} + b_{n2}) \} \} \quad (29)$$

ここで、(29)式右辺の $(v_{1i} + v_{i2})$ の項は $m-2$ 個（ $i = 3, 4, \dots, m$ ）, $(b_{1j} + b_{j2})$ の項は $n-m-2$ 個（ $j = m+1, m+2, \dots, n$ ）存在する。(29)式の両辺を $n-2$ 倍し、両辺に $m-2$ 個の v_{21} を加え、 $(v_{1i} + v_{i2})$ の項を $(v_{1i} + v_{i2} + v_{21})$ とすると、 $v_{1i} + v_{i2} + v_{21} = 0$ より、(30)を得る。

$$v_{12} = \frac{1}{n-m} \{ (b_{1,m+1} + b_{m+1,2}) + (b_{1,m+2} + b_{m+2,2}) + \cdots + (b_{1n} + b_{n2}) \} \quad (30)$$

すなわち、任意の欠落枝(i, j)（ $1 \leq i, j \leq m$ ）の仮想対比較値 w_{ij} について、(31)が成立する。

$$w_{ij} = \left\{ \prod_{k=m+1}^n (a_{ik}a_{kj}) \right\}^{\frac{1}{n-m}} \quad (31)$$

すなわち、項目数 = n の完全グラフから大きさ m の部分完全グラフが欠落したデザイングラフでは、欠落枝の仮想対比較値は、 $n-m$ 本の「実測枝からなる2ステップパス」の経路積の均等重みでの幾何平均となる。

6. トポロジー公式の予想

2, 3章で項目ウェイトに対する幾何平均型トポロジー公式を、4, 5章で欠落枝に対する仮想対比較値のトポロジー公式を考察した。欠落枝に対する仮想対比較値の一般トポロジー公式が完成すれば、同時に項目ウェイトのトポロジー公式も完成するが、現時点では、仮想対比較値の一般トポロジー公式はすべてのトポロジーを網羅してはいない。そこで、本章では、まず、疎な並列パスから構成される2点(s, t)間の仮想対比較値の一般トポロジー公式を考察し、それにもとづき、仮想対比較値の一般トポロジー公式の完成版を予想する。

6.1. 疎な並列パスから構成される2点間の仮想一対比較値

最初に、図1に示す①～④間に2本の疎な並列パスが存在するデザイングラフの①～④間の仮想一対比較値 w_{14} を考察する。①と④を切り離す6つのカットセットを図中に示したが、各カットセットについて以下の(32)～(37)が成立する。

$$\text{カットセット1} \cdots (v_1 - v_2) + (v_1 - v_5) = b_{12} + b_{15} \quad (32)$$

$$\text{カットセット2} \cdots (v_2 - v_3) + (v_1 - v_5) = b_{23} + b_{15} \quad (33)$$

$$\text{カットセット3} \cdots (v_3 - v_4) + (v_1 - v_5) = b_{34} + b_{15} \quad (34)$$

$$\text{カットセット4} \cdots (v_1 - v_2) + (v_5 - v_4) = b_{12} + b_{54} \quad (35)$$

$$\text{カットセット5} \cdots (v_2 - v_3) + (v_5 - v_4) = b_{23} + b_{54} \quad (36)$$

$$\text{カットセット6} \cdots (v_3 - v_4) + (v_5 - v_4) = b_{34} + b_{54} \quad (37)$$

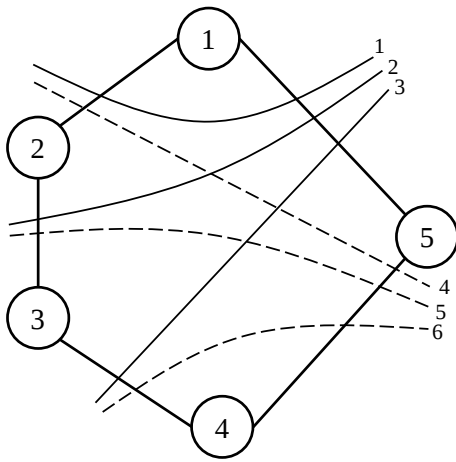


図1: ①～④間に2本の並列パスが存在する例

(32)～(37)の右辺と左辺の総和をとり、整理すると、(38),(39)を得る。

$$v_{14} = (v_1 - v_4) = \frac{2}{5}(b_{12} + b_{23} + b_{34}) + \frac{3}{5}(b_{15} + b_{54}) \quad (38)$$

$$w_{14} = (a_{12}a_{23}a_{34})^{\frac{2}{5}}(a_{15}a_{54})^{\frac{3}{5}} \quad (39)$$

さらに、一般化して、 $s \sim t$ 間に疎な N 本のパスが存在し、 k 番目のパスのステップ数（枚数）を S_k 、経路積を A_k とすると、 $s \sim t$ 間の仮想一対比較値は(40)式で与えられる。

$$w_{st} = \prod_{k=1}^N A_k^{P_k} \quad (40)$$

$$P_k = \frac{\frac{1}{S_k}}{\sum_j \frac{1}{S_j}} \quad (41)$$

ここで、 P_k は k 番目の経路積の幾何平均時の比率重みで、ステップ数に反比例した重みが付与されていることがわかる。

6.2. 仮想一対比較値のトポロジー公式の予想

文献[1, 2, 3, 等]ならびに本論文の考察にもとづき、トポロジー公式が満足すべき性質を以下に検討する。

〔性質1：ステップ数反比例重み〕

6.1節の考察より、欠落枝 (i, j) 間に複数本の評価経路が存在する場合は、ステップ数が少ない方の経路の幾何平均重みが大い。各パスが互いに疎な場合（6.1節、[3]の2.4節のループ）には、正確にステップ数に反比例した重みを持つ。□

〔性質2：相似パスに対する均等重み〕

5.2節での考察のように疎な部分完全グラフ（1つの枝も含む）の集合が欠落枝集合となる場合には、欠落枝 (i, j) 間の複数本の単純パスから成る評価経路はすべて同一ステップ数を持ち、それらの幾何平均重みは均等である。□

7. おわりに

AHP一対比較行列の不完全情報下のLLS解についての幾何平均公式とトポロジー公式の関連性について考察した。幾何平均公式の非線形連立方程式(12)あるいはその対数線形版に対して、Mason公式あるいはパス代数の A_k 解釈などの一般的なトポロジー公式を適用して、LLS解の一般トポロジー公式を導出する事が今後の課題である。

参考文献

- [1] 茂木渉、篠原正明：不完全情報一対比較行列に対する未知ウェイト代入法とHarker法・対数最小二乗法との関係、平成23年度 日本大学生産工学部 第44回学術講演会・数理情報部会講演論文集、pp.1103-1106 (2011.12).
- [2] 篠原正明、篠原健：AHP不完全一対比較情報の対数最小二乗解のトポロジー公式、平成19年度 日本大学生産工学部 第44回学術講演会・数理情報部会講演論文集、pp.67-71 (2007.12).
- [3] 篠原正明：一対比較デザイングラフにおける評価フローと価値ポテンシャル、日本OR学会2004春研究論文集、pp.36-37 (2004.3).