ISSN 2186-5647

－日本大学生産工学部第45回学術講演会講演概要（2012-12-1）－

2-75

# データ変換をともなうDEA(その１)

## ― データ変換と定式化 ―

日大生産工　○篠原　正明　情報システム研究所　篠原　健

### １．はじめに

通常ＤＥＡでは仮想入力(仮想出力)として各入力(出力)項目データ値の重み付き算術平均を用いており、その結果として個々のフロンティアが線形となる。算術平均のかわりに一般化平均を採用したＤＥＡを提案し、それにより非線形なフロンティア面の実現を検討する。

### ２．一般化平均ＤＥＡの一般論

DMU$_j$の仮想入力　$VI_j = f^{-1}(\sum_{i=1}^{m} v_i f(x_{ij}))$　（1）

DMU$_j$の仮想出力　$VO_j = g^{-1}(\sum_{r=1}^{s} u_r g(y_{rj}))$　（2）

ここで、ｆは各入力データ$x_i$の変換関数、yは各出力データ$y_r$の変換関数である。$f^{-1}$, $g^{-1}$ は、f, gの逆関数である。又、平均値を想定するので、各重みについては、(3), (4)を仮定する。

$\sum v_i = 1, \quad v_i \geq 0$　（3）　$\sum u_r = 1, \quad u_r \geq 0$　（4）

DMU$_j$の絶対効率値$A_j(u,v) = \dfrac{VO_j(u,v)}{VI_j(u,v)}$　（5）

DMU$_k$の相対効率値$R_k(u,v) = \dfrac{A_k(u,v)}{\max_j\{A_j(u,v)\}}$　（6）

DMU$_k$のＤＥＡ効率値$D_k = \max_{(u,v)} R_k(u,v)$　（7）

### ３．１ 線形関数（ｆ(ｘ)＝ｘ、ｇ(ｙ)＝ｙ)

（７）式の(u, v)の変化領域を「u≥0, v≥0」とすることにより、以下のＬＰ問題（８）～（１１）に帰着する。

目的関数：　$u^T y_k$→最大化　（８）

制約条件：　$v^T x_k = 1$ (9)　$v^t X \geq u^t Y$ (10)　u≥0,　v≥0 (11)

### ３．２ べき乗関数（ｆ(ｘ)＝ｘ$^p$、ｇ(ｙ)＝ｙ$^q$)

$VI_j = (\sum v_i x_{ij}^p)^{\frac{1}{p}}$　（１２）　$VO_j = (\sum u_r y_{rj}^q)^{\frac{1}{q}}$　（１３）

$$A_j = \frac{(\sum u_r y_{rj}^q)^{\frac{1}{q}}}{(\sum v_i x_{ij}^p)^{\frac{1}{p}}} \quad (14) \qquad A_j = \frac{(u^t y_j^{(q)})^{\frac{1}{q}}}{(v^t x_j^{(p)})^{\frac{1}{p}}} \quad (15)$$

$x_j^{(p)}=\{x_{ij}^p\}$, $y_j^{(q)}=\{y_{rj}^q\}$と表記すると, (14)は(15)となる。p=qの場合を以下考察する。

$$A_j = (\frac{u^t y_j^{(p)}}{v^t x_j^{(p)}})^{\frac{1}{p}} \quad (16) \qquad \mathrm{R}_k = (\frac{(\frac{u^t y_k^{(p)}}{v^t x_k^{(p)}})^{\frac{1}{p}}}{\max_j\{(\frac{u^t y_j^{(p)}}{v^t x_j^{(p)}})^{\frac{1}{p}}\}} \quad (17)$$

さらに、p=q>0を仮定すると、(17)は(18)となる。又、p=q<0を仮定すると。(17)は(19)となる。

$$\mathrm{R}_k = (\frac{\frac{u^t y_k^{(p)}}{v^t x_k^{(p)}}}{\max_j\{\frac{u^t y_j^{(p)}}{v^t x_j^{(p)}}\}})^{\frac{1}{p}} \quad (18) \qquad \mathrm{R}_k = (\frac{\frac{u^t y_k^{(p)}}{v^t x_k^{(p)}}}{\min_j\{\frac{u^t y_j^{(p)}}{v^t x_j^{(p)}}\}})^{\frac{1}{p}} \quad (19)$$

$R_k$最大問題は(18)あるいは(19)を(7)に代入し, (u, v)の変化領域を「u≥0, v≥0」とすると、以下の通り(i), (ii)となる。

(i)p=q>0（(18)を代入)

目的関数：$R_k(u,v)^p$ →最大化　(20)

制約条件：u≥0, v≥0　(21)

すなわち、ｐ乗データＬＰ問題（２２）～（２５）に帰着する。

目的関数：$u^T y^{(p)}_k$→最大化　(22)

制約条件：$v^T x^{(p)}_k=1$　(23)　$v^T X^{(p)} \geq u^T Y^{(p)}$　(24)

u≥0, v≥0　(25)　但し、$x^{(p)} = \{x_{ij}^p\}, Y^{(p)} = \{y_{rj}^{(p)}\}$.

(ii)p=q<0（(19)を代入)

目的関数：$R_k(u,v)^p$ →最小化　(26)

制約条件：u≥0, v≥0　(27)

これを、(28), (29)と変形し、ｐ乗データＬＰ問題（３０）～（３３）に帰着する。

---

DEA with Data Transformation
Part 1: Data Transformation and Formulation
Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

目的関数：$R_k(u,v)^p$ の逆数→最大化　(28)

制約条件：u≥0, v≥0　(29)

目的関数：$v^T x^{(p)}_k$→最大化　(30)

制約条件：$u^T y^{(p)}_k=1$　(31)　$u^T Y^{(p)} \geq v^T X^{(p)}$　(32)　u≥0, v≥0　(33)

ＬＰ(22)-(25)の$X^{(p)}, Y^{(p)}$とＬＰ(30)-(31)の$X^{(p)}, Y^{(p)}$はパラメタｐが異なるので、別のデータ行列であるが、形式上は両ＬＰは相対的に順ＤＥＡと逆ＤＥＡの関係にある。

３．３　逆関数の分数関数$f^{-1}(x)/g^{-1}(y)$がx/yの単調増加関数h(x/y)の場合。

3.2節の(i)p=q>0の場合がこの場合に相当する。すなわち、

$f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{p}}, g^{-1}(y)=y^{\frac{1}{p}}$で, $h(x/y)=(x/y)^{\frac{1}{p}}$ となる。これを一般化したのが、3.3節であり、$R_k$ は(34)で与えられる。ここで、$x_j^{(f)}=\{f(x_{ij})\}, y_j^{(g)}=\{g(y_{rj})\}$。(34)の両辺にｈの逆関数を作用させると、(35)を得る。

$$R_k(u,v)=h\left(\frac{\frac{u^T y_k^{(g)}}{v^T x_k^{(f)}}}{\max_j\{\frac{u^T y_j^{(g)}}{v^T x_j^{(f)}}\}}\right) \quad (34) \qquad h^{-1}(R_k(u,v))=\frac{\frac{u^T y_k^{(g)}}{v^T x_k^{(f)}}}{\max_j\{\frac{u^T y_j^{(g)}}{v^T x_j^{(f)}}\}} \quad (35)$$

ここで。$h^{-1}$も単調増加と仮定すると、$R_k$最大化は$h^{-1}(R_k)$最大化となり、データ変換ＬＰ問題(36)～(39)に帰着する。

目的関数：$u^T y_k^{(g)}$→最大化　(３６)

制約条件：$v^T x^{(f)}_k=1$ (37)　$v^t X^{(f)} \geq u^t Y^{(g)}$ (38)　u≥0, v≥0 (39)

但し、$X^{(f)}=\{f(x_{ij})\}, Y^{(g)}=\{g(y_{rj})\}$.

４．一般化平均ＤＥＡ

３節では比率形式を保存する入力データの変換法を考察対象としたが、本章では「比較形式から差分形式」と「差分形式から比率形式」の２種の一般化平均ＤＥＡを考察する。

４．１　比率形式から差分形式の効率性測度変換法

(1),(2)において例えばf(x)=g(x)=log xとしよう。すると、$f^{-1}(x)=g^{-1}(x)=e^x$となり、VI, VO, $A_j$, $R_k$は(40)-(43)となる。

$$VI=\exp(\sum v_i \log(x_i)) \quad (40) \qquad VO=\exp(\sum u_r \log(y_r)) \quad (41)$$

$$A_j(u,v)=\exp((\sum u_r \log(y_{rj})-\sum v_i \log(x_{ij})) \quad (42)$$

$$R_k(u,v)=\frac{A_k(u,v)}{\max_j\{A_j(u,v)\}}=\exp[(\sum u_r \log(y_{rk})-\sum v_i \log(x_{ij})-\max_j\{\sum u_r \log(y_{rj})-\sum v_i \log(x_{ij})\}] \quad (43)$$

すなわち、差分形式の相対効率値(44)の最大化問題に帰着する。

$$\log R_k(u,v)=v^t \log x_k-u^t \log y_k -\max_j\{v^t \log x_j-u^t \log y_j\} \quad (４４)$$

但し、$\log x_j=\{\log x_{ij}\}, \log y_j=\{\log y_{rj}\}$。

４．２　差分式から比率形式への効率性測度変換法

(1),(2)において例えばf(x)=g(x)= $e^x$ としよう。すると、$f^{-1}(x)=g^{-1}(x)=\log x$となり, VI, VO, 差分形式絶対効率値$A_j$, 差分形式相対効率値$R_k$は(45)-(48)となる。

$$VI=\log(\sum v_i \exp(x_i)) \quad (45) \qquad VO=\log(\sum u_r \exp(y_r)) \quad (46)$$

$$A_j(u,v)=VO_j(u,v)-VI_j(u,v) =\log(\sum v_i \exp(x_{ij})/\sum u_r \exp(y_{rj})) \quad (47)$$

$$R_k(u,v)=A_k(u,v)-\max_j\{A_j(u,v)\} =\log\left(\frac{\frac{\sum v_i \exp(x_{ik})}{\sum u_r \exp(y_{rk})}}{\max_j\{\frac{\sum v_i \exp(x_{ij})}{\sum u_r \exp(y_{rj})}\}}\right) \quad (48)$$

すなわち。比率形式の相対効率値（４９）の最大化問題（データをX, Yから$\exp(x)=\{\exp(x_{ij})\}, \exp(Y)=\{\exp(y_{rj})\}$としたDEA・CCRモデル）に帰着する。

$$\exp(R_k(u,v))=\frac{\frac{v^t \exp(x_k)}{u^t \exp(y_k)}}{\max_j\{\frac{v^t \exp(x_j)}{u^t \exp(y_j)}\}} \quad (49)$$

但し、$\exp(x_j)=\{\exp(x_{ij})\}, \exp(y_j)=\{\exp(y_{rj})\}$.

５．おわりに

仮想入力ＶＩ，仮想入力ＶＯに重み付き一般化平均の概念を適用した。変換関数がべき乗関数の場合（３．２節）は変換データでのＬＰ問題に帰着し、３．３節でこの一般論を論じたが、べき乗関数以外の具体的な関数形は何があるであろうか？４章では対数変換と指数変換の適用を考察し、相互に表裏の関係にあることを示した。又、利益＝収益（VO）－費用（VI）と差分形式の効率性測度を考慮した効率性評価は、絶対効率値$A_j=VO_j-VI_j$あるいは相対効率値も$R_k=A_k-\max\{A_j\}$, 等と定式化でき、このようにすれば指数変換データexp(X), exp(Y)を持つＣＣＲモデルとしてＬＰ解法が可能であることも示した（４．２節）。