

遊戯ゲームの情報構造と数理分析

(その7)偶数すくみジャンケンポンゲームのLP基底解アプローチ

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

篠原 健

1. はじめに

(その5) [1]では奇数すくみ、(その6) [2]では4すくみのジャンケンポンゲームのミニマクス均衡解に対して、LP基底解に基づく考察を行った。本論文(その7)では、一般の巡回的(cyclic)偶数($n=2m$)すくみジャンケンポンゲームに対してLP基底解アプローチを展開する。

2. 利得行列Aとその同時方程式

戦略数が偶数($n=2m$)の時の利得行列Aは奇数戦略ベクトル x_o 、偶数戦略ベクトル x_e と整理すると、同時方程式 $Ax=0$ は(1)で表現できる。

$$\begin{pmatrix} 0 & G \\ -G^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ x_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

あるいは、 $Gx_e=0$ (2) $G^Tx_o=0$ (3)

但し、Gは(4)で与えられる(空欄は0)。

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & -a_{2m} \\ -a_2 & a_3 & & & & & \\ & -a_4 & a_5 & & & & \\ & & -a_6 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & a_{2m-3} & & \\ & & & & -a_{2m-2} & a_{2m-1} & \end{pmatrix} \quad (4)$$

又、 $x_o=(x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2m-1})^T$, $x_e=(x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2m})^T$ 。

(その6) [2]では、Case1で全戦略(4章)、Case2で奇数戦略(5章)、Case3で偶数戦略(6章)の順番で分析したが、全戦略は奇数戦略と偶数戦略の凸結合として表現できるので、本論文(その7)では全戦略の場合をCase3として最後(5章)で解析する。

3. Case1(奇数戦略)の解析

[2]の5章と同様の議論により、(5)~(7)を満たす解が存在すれば、それは対称型2人零和行列ゲームのLP問題の最適基底解であり、対称型2人零和行列ゲームの最大化プレ

イヤのミニマクス均衡解(同時に最小化プレイヤーの最大ミニ均衡解)を与える。

$$G^Tx_o \geq 0 \quad (5) \quad 1^Tx_o = 1 \quad (6) \quad x_o \geq 0 \quad (7)$$

(5)の行列表現の不等式は、行毎に上から下へ以下のm本の不等式となる。

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} \geq \frac{x_3}{x_1} & \quad (8-1) & \frac{a_3}{a_4} \geq \frac{x_5}{x_3} & \quad (8-2) & \frac{a_5}{a_6} \geq \frac{x_7}{x_5} & \quad (8-3) \\ \dots\dots & & \frac{a_{2m-1}}{a_{2m}} \geq \frac{x_1}{x_{2m-1}} & \quad (8-m) \end{aligned}$$

ここで、不等式(8-i)は(5)の第i行に相当する。

(8-1)~(8-m)より(9)の関係式を得る。

$$a_1 a_3 a_5 \cdots a_{2m-1} \geq a_2 a_4 a_6 \cdots a_{2m} \quad (9)$$

奇数戦略利得積 $a_1 a_3 a_5 \cdots a_{2m-1} \geq$ 偶数戦略利得積 $a_2 a_4 a_6 \cdots a_{2m}$ 、すなわち、奇数戦略の優越である。(9)で等号が成立するのは、(8-1)~(8-m)すべてにおいて等号が成立する時に限る。

さて、(5)~(7)を満たす解を、基底解の概念を用いて、以下に導出する。

(8-1)~(8-m)の不等式体系において、第i番式(8-i)から続く(あるいは、(8-i-1)を除いた)m-1本の不等式「(8-i), (8-i+1), (8-i+2), ..., (8-i+m-2) mod m」を等号化した不等式に正規化条件(6)を付加した連立方程式の解を第i基底解($i=1, \dots, m$)と呼ぶと(なお、式番号はmod mで数える)、第i基底解以下の(10-1)~(10-m)で与えられる。

$$X_{2i-1}(i) = \frac{1}{\Delta_{2i-1}} \quad (10-1) \quad X_{2i+1}(i) = \frac{1}{\Delta_{2i-1}} \left(\frac{a_{2i-1}}{a_{2i}} \right) \quad (10-2)$$

$$X_{2i+3}(i) = \frac{1}{\Delta_{2i-1}} \left(\frac{a_{2i-1} a_{2i+1}}{a_{2i} a_{2i+2}} \right) \quad (10-3) \quad \dots\dots$$

$$X_{2i+2m-3}(i) = \frac{1}{\Delta_{2i-1}} \left(\frac{a_{2i-1} a_{2i+1} \cdots a_{2i+2m-5}}{a_{2i} a_{2i+2} \cdots a_{2i+2m-4}} \right) \quad (10-m)$$

$$\Delta_{2i-1} = 1 + \frac{a_{2i-1}}{a_{2i}} + \frac{a_{2i-1} a_{2i+1}}{a_{2i} a_{2i+2}} + \dots + \frac{a_{2i-1} a_{2i+1} \cdots a_{2i+2m-5}}{a_{2i} a_{2i+2} \cdots a_{2i+2m-4}} \quad (11)$$

但し、(10-1)~(10-m), (11)で添字はmod nである。

(10-1)~(10-m)を要素として持つ第i基底奇数戦略ベクトルを

$x_0(i)$ とすると、 $a_i > 0$ なら $x_0(i) > 0$, $a_i \geq 0$ なら $x_0(i) \geq 0$ が成り立つので、 $x_0(i)$ は (7) をも満たす。従って、(5)～(7) を満たす解 x_0 は $x_0(i)$ ($i=1, \dots, m$) の凸結合として (12) で表現できる。

$$x_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_0(i) \quad (12) \quad \sum \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (13)$$

[例3.1] $n=2m=6$ で、 $a_1=7, a_2=2, a_3=3, a_4=4, a_5=5, a_6=6$ の場合

$a_1 a_3 a_5 = 105 > 48 = a_2 a_4 a_6$ で、奇数戦略が優越する。

以下に第 i 基底解 ($i=1, 2, 3$) を与える。

$$[i=1] \quad x_1(1) = \frac{1}{\Delta_1} \quad (14) \quad x_3(1) = \frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \quad (15)$$

$$x_5(1) = \frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} \right) \quad (16) \quad \Delta_1 = 1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} \quad (17)$$

$$\text{すなわち、} x_1(1) = 8/57, x_3(1) = 28/57, x_5(1) = 21/57 \quad (18)$$

$$[i=2] \quad x_3(2) = \frac{1}{\Delta_3} \quad (19) \quad x_5(2) = \frac{1}{\Delta_3} \left(\frac{a_3}{a_4} \right) \quad (20)$$

$$x_7(2) = x_1(2) = \frac{1}{\Delta_3} \left(\frac{a_3 a_5}{a_4 a_6} \right) \quad (21) \quad \Delta_3 = 1 + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_3 a_5}{a_4 a_6} \quad (22)$$

$$\text{すなわち、} x_1(2) = 15/57, x_3(2) = 24/57, x_5(2) = 18/57 \quad (23)$$

$$[i=3] \quad x_5(3) = \frac{1}{\Delta_5} \quad (24) \quad x_7(3) = x_1(3) = \frac{1}{\Delta_5} \left(\frac{a_5}{a_6} \right) \quad (25)$$

$$x_9(3) = x_3(3) = \frac{1}{\Delta_5} \left(\frac{a_5 a_1}{a_6 a_2} \right) \quad (26) \quad \Delta_5 = 1 + \frac{a_5}{a_6} + \frac{a_5 a_1}{a_6 a_2} \quad (27)$$

$$\text{すなわち、} x_1(3) = 10/57, x_3(3) = 35/57, x_5(3) = 12/57 \quad (28)$$

従って、奇数戦略ベクトル x_0 は $x_0(1), x_0(2), x_0(3)$ の凸結合 (29) で表現できる (図1)。

$$x_0 = \lambda_1 x_0(1) + \lambda_2 x_0(2) + \lambda_3 x_0(3) \quad (29)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (30) \quad \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \quad (31)$$

$$x_0(1) = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_3(1) \\ x_5(1) \end{pmatrix}, \quad x_0(2) = \begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_3(2) \\ x_5(2) \end{pmatrix}, \quad x_0(3) = \begin{pmatrix} x_1(3) \\ x_3(3) \\ x_5(3) \end{pmatrix} \quad (32)$$

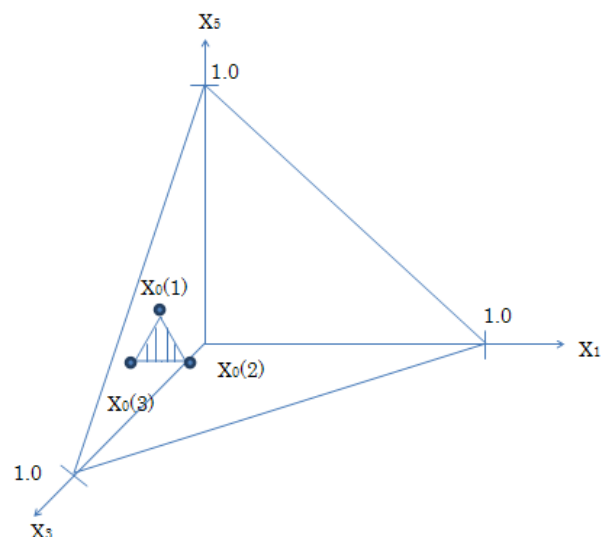


図1：3次元の奇数戦略ベクトル空間 (x_1, x_3, x_5) における戦略解平面上 ($x_1 + x_3 + x_5 = 1, x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_5 \geq 0$) での $x_0(1), x_0(2), x_0(3)$ の凸結合としての奇数戦略均衡解概略図 (例3.1終り)

4. Case2(偶数戦略)の解析

[2]の6章と同様の議論により、(33)～(35)を満たす解が存在すれば、それはLP問題の最適基底解を与える。

$$Gx_0 \leq 0 \quad (33) \quad 1^T x_0 = 1 \quad (34) \quad x_0 \geq 0 \quad (35)$$

(33)の行列表現の不等式は、行毎に上から下へ以下の m 本の不等式となる。

$$\frac{x_2}{x_{2m}} \leq \frac{a_{2m}}{a_1} \quad (36-1) \quad \frac{x_4}{x_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \quad (36-2)$$

$$\frac{x_6}{x_4} \leq \frac{a_4}{a_5} \quad (36-3) \quad \dots \quad \frac{x_{2m}}{x_{2m-1}} \leq \frac{a_{2m-2}}{a_{2m-1}} \quad (36-m)$$

(36-1)～(36-m)より(37)の偶数戦略優越の関係式を得る。

$$a_1 a_3 a_5 \cdots a_{2m-1} \leq a_2 a_4 a_6 \cdots a_{2m} \quad (37)$$

(37)で等号が成立するのは、(36-1)～(36-m)すべてにおいて等号が成立するときに限る。さて、(33)～(35)を満たす解を、基底解の概念を用いて、以下に導出する。

(36-1)～(36-m)の不等式体系において、第 i 番式 (36- i) から続く $m-1$ 本の不等式「(36- i), (36- $i+1$), (26- $i+2$), (36- $i+m-2$) mod m 」を等号化した方程式に正規化条件(34)を付加した連立方程式の解を第 i 基底解 ($i=1, \dots, m$) と呼ぶと、第 i 基底解は以下の (38-1)～(38-m) で与えられる。

$$x_{2i-2}(i) = \frac{1}{\Delta_{2i-2}} \quad (38-1) \quad x_{2i}(i) = \frac{1}{\Delta_{2i-2}} \left(\frac{a_{2i-2}}{a_{2i-1}} \right) \quad (38-2)$$

$$x_{2i+2}(i) = \frac{1}{\Delta_{2i-2}} \left(\frac{a_{2i-2} a_{2i}}{a_{2i-1} a_{2i+1}} \right) \quad (38-3)$$

$$x_{2i+4}(i) = \frac{1}{\Delta_{2i-2}} \left(\frac{a_{2i-2} a_{2i} a_{2i+2}}{a_{2i-1} a_{2i+1} a_{2i+3}} \right) \quad (38-4)$$

：

$$x_{2i+2m-4}(i) = \frac{1}{\Delta_{2i-2}} \left(\frac{a_{2i-2}a_{2i} \cdots a_{2i+2m-4}}{a_{2i-1}a_{2i+1}a_{2i+3} \cdots a_{2i+2m-5}} \right) \quad (38-m)$$

$$\Delta_{2i-2} = 1 + \frac{a_{2i-2}}{a_{2i-1}} + \frac{a_{2i-2}a_{2i}}{a_{2i-1}a_{2i+1}} + \cdots + \frac{a_{2i-2}a_{2i} \cdots a_{2i+2m-4}}{a_{2i-1}a_{2i+1}a_{2i+3} \cdots a_{2i+2m-5}} \quad (39)$$

但し、(38-1)～(38-m)、(39)で添字はmod nである。

(38-1)～(38-m)を要素として待つ第i基底偶数戦略ベクトルを $x_e(i)$ とすると、 $a_i > 0$ なら $x_e(i) > 0$ 、 $a_i \geq 0$ なら $x_e(i) \geq 0$ が成り立つので、 $x_e(i)$ は(35)をも満たす。従って、(33)～(35)を満たす解 x_e は $x_e(i)$ ($i=1, \dots, m$) の凸結合として(40)で表現できる。

$$x_e = \sum_{i=1}^m \mu_i x_e(i) \quad (40) \quad \sum \mu_i = 1, \mu_i \geq 0 \quad (41)$$

[例4.1] $n=2m=6$ で、 $a_1=1, a_2=2, a_3=3, a_4=4, a_5=5, a_6=6$ の場合 $a_1a_3a_5=15 < 48=a_2a_4a_6$ で、偶数戦略が優越する。

以下に第i基底解($i=1, 2, 3$)を与える。

$$[i=1] \quad x_0(1)=x_6(0)=\frac{1}{\Delta_6} \quad (42) \quad x_2=\frac{1}{\Delta_6} \left(\frac{a_6}{a_1} \right) \quad (43)$$

$$x_6=\frac{1}{\Delta_6} \left(\frac{a_6a_2}{a_1a_3} \right) \quad (44) \quad \Delta_6=1+\frac{a_6}{a_1}+\frac{a_6a_2}{a_1a_3} \quad (45)$$

$$\text{すなわち、} x_2(1)=6/11, x_4(1)=4/11, x_6(1)=1/11 \quad (46)$$

$$[i=2] \quad x_2(2)=\frac{1}{\Delta_2} \quad (47) \quad x_4(2)=\frac{1}{\Delta_6} \left(\frac{a_6}{a_1} \right) \quad (48)$$

$$x_6(2)=\frac{1}{\Delta_2} \left(\frac{a_2a_4}{a_3a_5} \right) \quad (49) \quad \Delta_2=1+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_2a_4}{a_3a_5} \quad (50)$$

$$\text{すなわち、} x_2(2)=5/11, x_4(2)=10/33, x_6(2)=8/33 \quad (51)$$

$$[i=3] \quad x_4(3)=\frac{1}{\Delta_4} \quad (52) \quad x_6(3)=\frac{1}{\Delta_4} \left(\frac{a_4}{a_5} \right) \quad (53)$$

$$x_6(3)=x_2(3)=\frac{1}{\Delta_4} \left(\frac{a_4a_6}{a_5a_1} \right) \quad (54) \quad \Delta_4=1+\frac{a_4}{a_5}+\frac{a_4a_6}{a_5a_1} \quad (55)$$

$$\text{すなわち、} x_2(3)=8/11, x_4(3)=5/33, x_6(3)=4/33 \quad (56)$$

従って、偶数戦略ベクトル x_e は $x_e(1)$ 、 $x_e(2)$ 、 $x_e(3)$ の凸結合(57)で表現できる(図2)。

$$x_e = \mu_1 x_e(1) + \mu_2 x_e(2) + \mu_3 x_e(3) \quad (57)$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \quad (58) \quad \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0 \quad (59)$$

$$x_e(1) = \begin{pmatrix} x_2(1) \\ x_4(1) \\ x_6(1) \end{pmatrix}, x_e(2) = \begin{pmatrix} x_2(2) \\ x_4(2) \\ x_6(2) \end{pmatrix}, x_e(3) = \begin{pmatrix} x_2(3) \\ x_4(3) \\ x_6(3) \end{pmatrix} \quad (60)$$

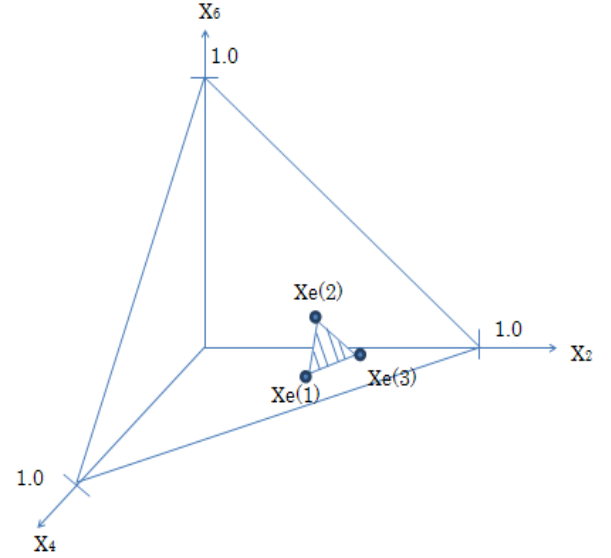


図2：3次元の偶数戦略ベクトル空間(x_2, x_4, x_6)における戦略平面上($x_2+x_4+x_6=1, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_6 \geq 0$)での $x_e(1)$ 、 $x_e(2)$ 、 $x_e(3)$ の凸結合としての偶数戦略均衡解概略図 (例4.1終り)

5. Case3(全戦略)の解析

同次方程式(1)が非自明解を持つための必要十分条件は $|G|=0$ 、すなわち、「奇数戦略利得積=偶数戦略利得積」(61)となる。

$$a_1a_3a_5 \cdots a_{2m-1} = a_2a_4a_6 \cdots a_{2m} \quad (61)$$

この条件下で、基本的には、自由度2を持つ同時方程式(1)に正規化条件を付与して、自由度1を持つ一般解を得る(例えば、[1]の(25)～(28))。ここでは、以下に示す別のアプローチを採用する。すなわち、(61)が成立する時には奇数戦略での m 個の基底解がすべて $x_o(0)$ に一致し(62)、偶数戦略での m 個の基底解もすべて $x_e(0)$ に一致する(63)、従って $x_o = x_o(0)$ と $x_e = x_e(0)$ の凸結合として、全戦略の一般解 x_{all} を得る(64)。

$$x_o(1)=x_o(2)=\cdots=x_o(m)=x_o(0) \quad (62)$$

$$x_e(1)=x_e(2)=\cdots=x_e(m)=x_e(0) \quad (63)$$

$$x_{all} = \lambda_o \begin{pmatrix} x_o \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_e \begin{pmatrix} 0 \\ x_e \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$\lambda_o + \lambda_e = 1 \quad (65) \quad \lambda_o \geq 0, \lambda_e \geq 0 \quad (66)$$

すなわち、(62)～(66)において、もし奇数戦略が優越すれば $\lambda_o=1, \lambda_e=0$ となり、(64)は(67)となり、 x_o は(12)で表現される。又、もし偶数戦略が優越すれば、 $\lambda_o=0, \lambda_e=1$ となり、(64)は(68)となり、 x_e は(40)で表現される。

$$x_{all} = \begin{pmatrix} x_o \\ 0 \end{pmatrix} \quad (67) \quad x_{all} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_e \end{pmatrix} \quad (68)$$

【例5.1】 $n=2m=6$ で、 $a_1=2, a_2=4, a_3=2, a_4=4, a_5=5, a_6=6$ の場合
 $a_1a_3a_5=24=a_2a_4a_6$ で、全戦略が基底に入る。

$x_o(1)=x_o(2)=x_o(3)=x_o(0)$ 、 $x_e(1)=x_e(2)=x_e(3)=x_e(0)$ で、 $x_o(0)$ と
 $x_e(0)$ は(69)、(70)で与えられる。

$$x_o(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{23} \\ \frac{6}{23} \\ \frac{5}{23} \end{pmatrix} \lambda \quad (69) \quad x_e(0) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{19} \\ \frac{5}{19} \\ \frac{4}{19} \end{pmatrix} (1-\lambda) \quad (70)$$

従って、全戦略の一般解 x_{all} は(69)と(70)の凸結合、(71)で与えられる。

$$x_{all} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{23} \lambda \\ \frac{6}{23} \lambda \\ \frac{5}{23} \lambda \\ \frac{10}{19} (1-\lambda) \\ \frac{5}{19} (1-\lambda) \\ \frac{4}{19} (1-\lambda) \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad (72) \quad (\text{例5.1 終り})$$

【例5.2】 $n=2m=4$ で、 $a_1a_3=a_2a_4$ の一般の場合 ([3] の5章)

x_o, x_e, x_{all} は(73)、(74)、(75)で与えられる。

$$x_o(0) = \frac{1}{a_1+a_2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (73) \quad x_e(0) = \frac{1}{a_2+a_3} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$x_{all} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_o}{a_1+a_2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_e}{a_2+a_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$\lambda_o + \lambda_e = 1 \quad (76) \quad \lambda_o \geq 0, \lambda_e \geq 0 \quad (77)$$

(75)において、(78)とすると(79)が成立し、これらを(75)に代入し、 λ のみで表現すれば(その4) [3]の(27)を得る。

$$\lambda = \frac{\lambda_o}{1 + \frac{a_1}{a_2}} \quad (78) \quad \lambda_e = 1 - \lambda_o = 1 - \lambda \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) \quad (79)$$

(例5.2 終り)

6. おわりに

Case1 (奇数戦略) では、奇数戦略のみをとり、Case 2 (偶数戦略) では、偶数戦略のみをとる結果となったが、これは最単純の偶数すくみジャンケンポンゲームとして、 $n=2$ の「ゲー (1) とチョキ (2)」を考えれば、普通は奇数戦略であるゲー (1) のみを出す事からも、納得がいく。興味あるのは、どんな奇数戦略あるいは偶数戦略でも良いというわけではなく、3節、4節で示した条件(図1, 2参照)を満たす必要があるという点である。最大化プレイヤー、最小化プレイヤー共に、任意の奇数戦略あるいは偶数戦略を出せば、相子となり、見かけ上の均衡は得られるが、LPの最適性の観点からは不適切と考えられる。すなわち、たとえば奇数戦略でも、わずかに偶数戦略が採用される状況(摂動)を考えれば、3節、4節で示した条件が意味を持つ。あるいは、たとえCase1の奇数戦略優越時でも、不適切な奇数戦略を出すと、部分的にはあるが、偶数戦略が勝ることがありうると考えられる。

今後の研究課題は、上記の点を考慮した仮想プレイシミュレーションならびに通常のシミュレーション等による検証、さらには巡回型以外のジャンケンゲームの考察、等である。

参考文献

- [1] 篠原正明, 篠原 健: 遊戯ゲームの情報構造と数理分析 — (その5) 奇数すくみジャンケンポンゲームのLP基底解アプローチ, 第44回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会、pp. 1067-1070 (2011. 12. 3).
- [2] 篠原正明, 篠原 健: 遊戯ゲームの情報構造と数理分析 — (その6) 4すくみジャンケンポンゲームのLP基底解アプローチ, 第44回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会、pp. 1071-1074 (2011. 12. 3).
- [3] 篠原正明, 篠原 健: 遊戯ゲームの情報構造と数理分析 — (その4) n すくみ巡回ジャンケンポンゲームの提案, 第43回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会、pp. 129-132 (2010. 12. 4).