

2-クラスタ ANP におけるウェイト正規化手法の研究

日大生産工 ○西澤一友

1 はじめに

従来の Analytic Hierarchy Process (AHP)[3] および Analytic Network Process (ANP)[4] では、評価基準に対する各代替案の評価のウェイトを総和 1 に正規化している。しかし、結果として得られた総合ウェイトの検証はなかなか行われていない。木下らは早くから総和 1 に正規化することで起こる順位逆転などの危険性を指摘し、改善手法として支配型 AHP[2, 7] を提案している。他の改善手法としては、Belton-Gear model[1]、Referenced model[5]、Linking pins model[6] などが提案されているがウェイト正規化をもとにした改善手法ではない。代替案のウェイトの正規化は総合ウェイトに影響を及ぼすため、適切な正規化手法の確立が望まれている。

一方、西澤は AHP の評価基準どうしの一対比較は不安定であるため行わず、そのかわり、AHP に対応する 2 クラスタ ANP の改良として、転置行列 ANP[8, 9] を提案した。しかし転置行列 ANP においても正規化の問題の改善は進んでいない。改善手法として、満点ダミー代替案による AHP 正規化方法 [10]、および満点ダミー代替案による ANP 正規化方法 [11] を提案した。しかし、提案手法の ANP への適用で、検証結果は満足できるものではなく、正規化のさらなる改善が望まれる。

今回の報告では 2 クラスタの転置行列 ANP での正規化方法の検証と考察を行い、AHP や ANP の手法の改良を検討する。

2 2 クラスタ ANP

AHP に対応する ANP では、クラスタの一つが評価基準であり、もう一つが代替案の 2 クラスタで構成される。ANP では評価基準、代替案といった区別はなくなる。それぞれ、他のクラスタを相互評価することになる。

2 クラスタ ANP は有向グラフで表現すると図 1 のようになる。ここで、各評価基準に基づく各代替案の評価結果が W である。従来の AHP では各評価基準の評価結果 V を求めることはない。

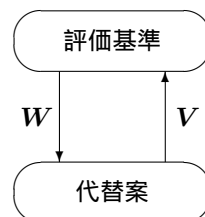


図 1 2 クラスタ ANP

図 1 の行列表現として超行列 S は式 (1) で示される。ただし、 S は確率行列、 0 は零行列である。

$$S = \left[\begin{array}{c|c} 0 & V \\ \hline W & 0 \end{array} \right] \quad (1)$$

従来の ANP では、式 (1) の極限行列 S^∞ を求めることにより代替案のウェイト w と評価基準のウェイト v が得られる。一方、代替案のウェイト w は $w = Wv$ 、また評価基準のウェイト v は $v = Vw$ で求まるので、行列表現すると式 (2) のようになる。

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & V \\ W & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right] \quad (2)$$

ここで、

$$a = \left[\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right] \quad (3)$$

とすると、 $Sa = 1a$ という S の固有値 1 に対する固有ベクトルを求める固有値問題となる。したがって S^∞ を計算する必要はない。転置行列 ANP では、AHP では求めることはない V の代わりに W^T を用いて超行列を作成する。転置行列 ANP の超行列を式 (4) に示す。

$$S_0 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & W^T \\ \hline W & 0 \end{array} \right] \quad (4)$$

Study on the weights normalization method in the 2-cluster ANP
Kazutomo NISHIZAWA

転置行列 ANP では S_0 を確率行列に変換して、固有値 1 に対する固有ベクトルを求め、評価基準、代替案に相当するウエイトを得る。

3 検証データ

AHP では正解のわからない問題に適用できることが利点であるが、しかし正解がわからないゆえに、意思決定後の検証がうまく行われていないのが現状である。そこで、検証可能で AHP の適用に構造が似ている検証データを通して、正規化の問題点を再確認する。ただし、この検証データは総和を求めるだけの問題であり、通常、AHP は適用しない例である。

検証データとして取り上げるのは表 1 に示す、学生の成績評価のデータである。各学生の成績は演習、宿題、レポート、試験の 4 項目の合計で評価される。

表 1 検証データ

学生	演習 (c_1) 20 点	宿題 (c_2) 20 点	レポート (c_3) 10 点	試験 (c_4) 50 点	合計点
a_1	20 点	12 点	10 点	35 点	77 点
a_2	20 点	18 点	10 点	44 点	92 点
a_3	19 点	12 点	9 点	4 点	44 点
a_4	16 点	13 点	7 点	26 点	62 点
a_5	20 点	17 点	10 点	34 点	81 点

表 1 のデータと AHP との対応をとると、学生 ($a_1 \sim a_5$) が代替案、演習 (c_1)、宿題 (c_2)、レポート (c_3)、試験 (c_4) が評価基準である。また、評価基準のウエイトは配点、代替案のウエイトは学生の得点、そして、総合ウエイトが合計点となる。

通常の評価方法は学生の得点を足し合わせて合計点を求める。AHP の手法に合わせると式 (5) のようになる。

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 & 10 & 35 \\ 20 & 18 & 10 & 44 \\ 19 & 12 & 9 & 4 \\ 16 & 13 & 7 & 26 \\ 20 & 17 & 10 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 92 \\ 44 \\ 62 \\ 81 \end{bmatrix} \quad (5)$$

式 (5) で、評価基準のウエイトをすべて 1 にしたことは、単に合計点を求めているだけである。こ

で、配点を評価基準と考え、得点を配点で正規化して合計点を求めると式 (6) のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.60 & 1.00 & 0.70 \\ 1.00 & 0.90 & 1.00 & 0.88 \\ 0.95 & 0.60 & 0.90 & 0.08 \\ 0.80 & 0.65 & 0.70 & 0.52 \\ 1.00 & 0.85 & 1.00 & 0.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 92 \\ 44 \\ 62 \\ 81 \end{bmatrix} \quad (6)$$

さらに、評価基準である配点を合計 100 ではなく、合計 1 に正規化して各合計点を求めると式 (7) のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.60 & 1.00 & 0.70 \\ 1.00 & 0.90 & 1.00 & 0.88 \\ 0.95 & 0.60 & 0.90 & 0.08 \\ 0.80 & 0.65 & 0.70 & 0.52 \\ 1.00 & 0.85 & 1.00 & 0.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.77 \\ 0.92 \\ 0.44 \\ 0.62 \\ 0.81 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式 (7) の結果は合計点の満点が 100 点ではなく、1 となっている。そして、各合計点を総和 1 に正規化しすると正解は式 (8) のようになる。ここで、評価基準ウエイトの正解は v^* 、評価基準ウエイトの正解は w^* である。

$$v^* = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad w^* = \begin{bmatrix} 0.216292 \\ 0.258427 \\ 0.123596 \\ 0.174157 \\ 0.227528 \end{bmatrix} \quad (8)$$

したがって、この検証データに対してある方法で代替案のウエイトを正規化し、総合ウエイトを求めたとき、得られた結果が式 (8) と一致すれば、適切な正規化手法であると確かめられる。

4 検証データの転置行列 ANP への適用

まず、表 1 の検証データをそのまま転置行列 ANP に適用し、検証を行ってみる。

表 1 より、超行列 S の小行列 W は式 (9) のようになる。

$$W = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 10 & 35 \\ 20 & 18 & 10 & 44 \\ 19 & 12 & 9 & 4 \\ 16 & 13 & 7 & 26 \\ 20 & 17 & 10 & 34 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式 (4) より確率行列ではない超行列 S_0 は式 (10)

のようになる。

$$S_0 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 19 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 18 & 12 & 13 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 9 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 44 & 4 & 26 & 34 \\ \hline 20 & 12 & 10 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 18 & 10 & 44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 12 & 9 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 13 & 7 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 17 & 10 & 34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (10)$$

S_0 を確率行列に変換し、主固有値、主固有ベクトルを計算し、評価基準と代替案に相当するウエイト、 v と w を求めると式 (11) のようになる。

$$v = \begin{bmatrix} 0.266854 \\ 0.202247 \\ 0.129213 \\ 0.401685 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0.216292 \\ 0.258427 \\ 0.123596 \\ 0.174157 \\ 0.227528 \end{bmatrix} \quad (11)$$

転置行列 ANP による結果 (11) を正解 (8) と比較すると、代替案ウエイトは一致しているが評価基準ウエイトは少し違っている。式 (10) に示した S_0 の小行列 W は検証データそのものであり、正規化は行われていない。

5 正規化例

通常、 W は生データではなく計算の途中で何らかの形で正規化されている。転置行列 ANP での超行列の正規化手法と得られた結果について考察してみる。

5.1 列和 1 正規化

まず、従来の AHP で行われている列和を 1 に正規化する手法を検討する。列和を 1 に正規化した小行列 W を式 (12) に示す。

$$W = \begin{bmatrix} 0.211 & 0.167 & 0.217 & 0.245 \\ 0.211 & 0.250 & 0.217 & 0.308 \\ 0.200 & 0.167 & 0.196 & 0.028 \\ 0.168 & 0.181 & 0.152 & 0.182 \\ 0.211 & 0.236 & 0.217 & 0.238 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式 (12) に示した小行列 W で作成された超行列より得られた、 v と w を式 (13) に示す。

$$v = \begin{bmatrix} 0.250000 \\ 0.250000 \\ 0.250000 \\ 0.250000 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0.209835 \\ 0.246402 \\ 0.147573 \\ 0.170742 \\ 0.225448 \end{bmatrix} \quad (13)$$

列和を 1 に正規化する手法では残念ながら代替案のウエイトの正しい値は得られない。評価基準の

ウエイトに注目すると、すべて等しい値になっていることがわかる。さらに、小行列 W の行和 x を求め、さらにその総和を 1 にした x_n を求めると式 (14) のようになる。

$$x = \begin{bmatrix} 0.83934 \\ 0.98561 \\ 0.59029 \\ 0.68297 \\ 0.90179 \end{bmatrix}, \quad x_n = \begin{bmatrix} 0.209835 \\ 0.246402 \\ 0.147573 \\ 0.170742 \\ 0.225448 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式 (13) の w と式 (14) の x_n は一致している。このことは、小行列 W の列和を 1 に正規化すると、単に各代替案のウエイトを加えたものが代替案の総合ウエイトになっていることがわかる。

5.2 行和 1 正規化

次に、行和を 1 に正規化した小行列 W と得られた結果 v と w を式 (15) と式 (16) に示す。

$$W = \begin{bmatrix} 0.260 & 0.156 & 0.130 & 0.455 \\ 0.217 & 0.196 & 0.109 & 0.478 \\ 0.432 & 0.273 & 0.205 & 0.091 \\ 0.258 & 0.210 & 0.113 & 0.419 \\ 0.247 & 0.210 & 0.123 & 0.420 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$v = \begin{bmatrix} 0.282786 \\ 0.208756 \\ 0.135894 \\ 0.372565 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0.200000 \\ 0.200000 \\ 0.200000 \\ 0.200000 \\ 0.200000 \end{bmatrix} \quad (16)$$

小行列 W の列和 y を求め、さらにその総和を 1 にした y_n を求めると式 (17) のようになる。

$$y = \begin{bmatrix} 1.41393 \\ 1.04378 \\ 0.67947 \\ 1.86282 \end{bmatrix}, \quad y_n = \begin{bmatrix} 0.282786 \\ 0.208756 \\ 0.135894 \\ 0.372565 \end{bmatrix} \quad (17)$$

式 (16) の v と式 (17) の y_n は一致している。

5.3 満点ダミー正規化

次に、満点ダミーで正規化した小行列 W と得られた結果を式 (18) と式 (19) に示す。残念ながらこの場合も、得られた w は正解ではない。

$$W = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.600 & 1.000 & 0.700 \\ 1.000 & 0.900 & 1.000 & 0.880 \\ 0.950 & 0.600 & 0.900 & 0.080 \\ 0.800 & 0.650 & 0.700 & 0.520 \\ 1.000 & 0.850 & 1.000 & 0.680 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$v = \begin{bmatrix} 0.300443 \\ 0.227704 \\ 0.290955 \\ 0.180898 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0.208729 \\ 0.239089 \\ 0.160025 \\ 0.168880 \\ 0.223276 \end{bmatrix} \quad (19)$$

式 (14) と同様に、小行列 W の行和 x を求め、さらにその総和を 1 にした x_n を求めると式 (20) のようになる。

$$x = \begin{bmatrix} 3.30 \\ 3.78 \\ 2.53 \\ 2.67 \\ 3.53 \end{bmatrix}, \quad x_n = \begin{bmatrix} 0.208729 \\ 0.239089 \\ 0.160025 \\ 0.168880 \\ 0.223276 \end{bmatrix} \quad (20)$$

この場合も式 (19) と式 (20) の w と x_n が一致している。

5.4 配点考慮満点ダミー正規化

さらに配点を考慮した満点ダミーで正規化した小行列 W と得られた結果を式 (21) と式 (22) に示す。この場合、得られた w は正解である式 (8) と一致している。

$$W = \begin{bmatrix} 0.200 & 0.120 & 0.100 & 0.350 \\ 0.200 & 0.180 & 0.100 & 0.440 \\ 0.190 & 0.120 & 0.090 & 0.040 \\ 0.160 & 0.130 & 0.070 & 0.260 \\ 0.200 & 0.170 & 0.100 & 0.340 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$v = \begin{bmatrix} 0.266854 \\ 0.202247 \\ 0.129213 \\ 0.401685 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0.216292 \\ 0.258427 \\ 0.123596 \\ 0.174157 \\ 0.227528 \end{bmatrix} \quad (22)$$

同様に、小行列 W の行和 x を求め、さらにその総和を 1 にした x_n を求めると式 (23) のようになる。

$$x = \begin{bmatrix} 0.77000 \\ 0.92000 \\ 0.44000 \\ 0.62000 \\ 0.81000 \end{bmatrix}, \quad x_n = \begin{bmatrix} 0.216292 \\ 0.258427 \\ 0.123596 \\ 0.174157 \\ 0.227528 \end{bmatrix} \quad (23)$$

この場合も式 (22) と式 (23) の w と x_n が一致している。

6 まとめ

2 クラスタ転置行列 ANP では、正解が得られたか否かによらず、小行列 W の正規化方法により、以下のことが言える。

- (1) W の列和を 1 に正規化すると代替案に相当する固有ベクトルは W の行和と一致し、評価基準は等ウエイトとなる。
- (2) W の行和を 1 に正規化すると評価基準に相当する固有ベクトルは W の列和と一致し、代替案は等ウエイトとなる。

これらの性質をうまく利用すれば、AHP や ANP の手法の改良に役立つものと思われる。

参考文献

- [1] V. Belton and T. Gear: The legitimacy of rank reversal – A comment, *Omega*, **13** (1985) 143-145.
- [2] E. Kinoshita and M. Nakanishi: Proposal of new AHP model in light of dominant relationship among alternatives, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **42** (1999) 180-197.
- [3] T. L. Saaty : *The Analytic Hierarchy Process*, (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [4] T. L. Saaty: *The Analytic Network Process* (RWS Publications, Pittsburgh, 1996).
- [5] B. Schoner and W. C. Wedley: Ambiguous criteria weights in AHP: Consequences and solutions, *Decision Sciences*, **20** (1989) 462-475.
- [6] B. Schoner, W. C. Wedley and E. U. Choo: A unified approach to AHP with linking pins, *European Journal of Operational Research*, **13** (1993) 384-392.
- [7] 木下栄蔵：階層分析手法による多目的意思決定問題への適用に関する研究、*交通工学*, **28** (1993) 35-44.
- [8] 西澤一友：2 クラスタ ANP の超行列簡易作成、*日本オペレーションズ・リサーチ学会 2005 年度秋季研究発表会*, pp142-143.
- [9] 西澤一友：3 段階評価と 2 クラスタ ANP による意思決定者のための簡易 AHP、*Journal of Japanese Symposium on The Analytic Hierarchy Process*, **1** (2007) 97-104.
- [10] 西澤一友：AHP における代替案ウエイト正規化手法の提案、*日本オペレーションズ・リサーチ学会 2011 年度秋季研究発表会*, pp264-265.
- [11] 西澤一友：転置行列 ANP における代替案ウエイト正規化手法の提案、*日本オペレーションズ・リサーチ学会 2012 年度春季研究発表会*, pp208-209.