ISSN 2186-5647

2-122

ＡＨＰ一対比較における過大評価・過小評価の改善に関する研究

日大生産工(学部)　○吉田 達矢　日大生産工　西澤　一友

1 まえがき

AHP (Analytic Hierarchy Process)は，意思決定における問題の分析において，人間の主観的判断とシステムアプローチとの両面からこれを決定する問題解決型の意思決定手法である。

この手法は，「問題の階層化」「一対比較」「ウェイト算出」「一次元データの総合化」の4つの工程がある。

工程の一つである一対比較とは，評価基準と代替案をすべての組み合わせにおいて比較する。比較は主に9点法を用いて9段階の比較を行う。しかし，その際に比較を間違えてしまうと，評価順位の順位逆転現象が起こってしまうことがある。順位が逆転すると本来選ばれるべき代替案とは別の代替案が選ばれる可能性があり，意思決定に大きな影響を及ぼす。

本研究では一対比較の過大評価・過小評価により起こる，順位逆転現象を改善する方法を提案する。

2 問題点

まず正常な一対比較行列を式(1)に示す。一対比較行列は評価基準に対してある代替案と他の代替案を比べて9段階で評価したものである。対角要素を1として，対称位置が逆数となる関係が成り立っている。式(1)より主固有値(λmax)と主固有ベクトル(w1～w5)を求め，主固有ベクトルより評価順位を決定する。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/9 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

得られた結果を表1に示す。主固有ベクトルは総和が1になるように正規化している。

表1　行列Aの主固有値と主固有ベクトル

λ_{max}	5.27641
w_1	0.55676
w_2	0.20494
w_3	0.12294
w_4	0.06947
w_5	0.04589

式(1)のように対角要素が1であり，右上が2～9である一対比較行列の場合，表1のように主固有ベクトルは$w_1 > w_2 > \cdots > w_5$という順位になるはずである。

次に過大評価または過小評価がある一対比較行列を式(2)に示す。

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 9 \\ 1/2 & 1 & 7 & 9 & 5 \\ 1/2 & 1/7 & 1 & 2 & 3 \\ 1/5 & 1/9 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式(2)の一対比較行列をパワー法を用いて解いた結果を表2に示す。通常であれば表1のような順序になるはずである。

表2　行列Bの主固有値と主固有ベクトル

λ_{max}	5.40546
w_1	0.38750
w_2	0.39587
w_3	0.11345
w_4	0.06004
w_5	0.04314

表2では表1と違い，w_1が2番目に大きく，w_2が最も大きい。つまり，w_1とw_2で順位の逆転が起きてしまっている。また，式(1)と式(2)を一目見ても順序が逆転するかどうかはわからない。

Study on the improvement of underestimation-overestimation in the AHP pairwise comparisons

Tatsuya YOSHIDA and Kazutomo NISHIZAWA

3　改善手法

今回提案する改善手法では，一対比較行列の要素を1つずつ欠落にしていき，その欠落をハーカー法で補う。ハーカー法は一対比較行列に欠落(0)があった場合，対角要素に1を加えることで補う手法である。この手法は整合度が最も良くなるように欠落を補うことができる。欠落を作った全ての一対比較行列をパワー法を用いて解き，順位の逆転に影響がある要素を特定する。また，その要素に1~9までを代入することで整合度(Consistency Index (C.I.))が最もよくなる値を決定する。

まず、式(3)という一対比較行列について考える。

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1\,n} \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1/a_{n-1\,n} & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)のa12要素を欠落にし，ハーカー法を適用すると式(4)が得られる。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1\,n} \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1/a_{n-1\,n} & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

a_{12}だけでなく$a_{13},a_{14},\cdots,a_{n-1\,n}$まで1つずつ欠落にし、対角に1を加えて補う。

また，整合度は以下の式で求める。nは行列の大きさ,λ_{max}は主固有値である。

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} \quad (5)$$

整合度は経験則から0.1未満であると良いとされている。

改善手法は以下の手順で行う。

① 一対比較行列を一ヵ所ずつ欠落(0)とし，それをハーカー法で補う。
② 欠落を補った行列すべての主固有値，主固有ベクトル，整合度をパワー法を用いて求める。
③ ②で求めたものの中で主固有ベクトルの順序が逆転していない一対比較行列を選ぶ。複数ある場合は整合度が最も良い一対比較行列を選ぶ。
④ 選んだ一対比較行列の欠落を1~9で補い，整合度を求める。整合度が最も良い値を評価値と判断する。

①～④の手順で導き出した評価と元々の値を比べることで，過大評価・過小評価されていたのかを調べる。

4　結果

まず，問題点で示した行列B(式(2))に対して改善手法を当てはめてみる。

改善手法により，式(2)の要素に欠落を作り，順位が逆転しなかったかどうかを調べた。その結果を表3に示す。bの下付き文字は欠落にした行列Bの要素であり,順位が逆転した場合は×を，順位が逆転しなかった場合は○を入れた。

表3　行列Bの順位逆転の検証

b_{12}	×	b_{13}	○	b_{14}	○	b_{15}	×
		b_{23}	○	b_{24}	○	b_{25}	×
				b_{34}	×	b_{35}	×
						b_{46}	×

表3の○がついている4ヵ所を欠落とした主固有値，主固有ベクトル，整合度を表4に示す。

表4 行列Bの順位が逆転しない場合の主固有値，主固有ベクトル，整合度

b_{13}欠落

λ_{max}	5.30525
w_1	0.43276
w_2	0.37347
w_3	0.09113
w_4	0.06009
w_5	0.04255
C.I.	0.07631

b_{14}欠落

λ_{max}	5.39256
w_1	0.40594
w_2	0.38489
w_3	0.11244
w_4	0.05423
w_5	0.04250
C.I.	0.09814

b_{23}欠落

λ_{max}	5.19893
w_1	0.40797
w_2	0.32775
w_3	0.14983
w_4	0.06805
w_5	0.04640
C.I.	0.04973

b_{24}欠落

λ_{max}	5.35349
w_1	0.39539
w_2	0.37358
w_3	0.11919
w_4	0.06768
w_5	0.04415
C.I.	0.08837

表4から，整合度が一番良いb_{23}を選び，欠落部分に1~9を挿入する。挿入した一対比較行列をパワー法を用いて解くことによりそれぞれの整合度が求まる。それを図1のようにグラフで表現した。

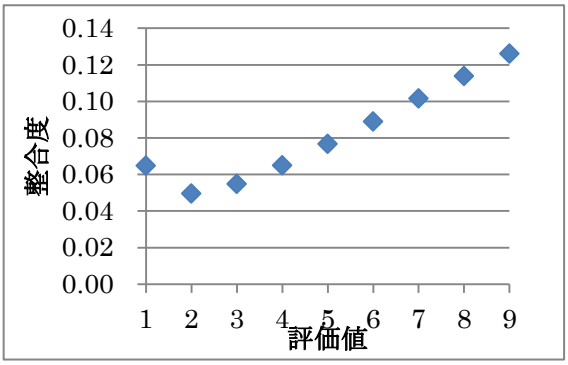

図1　a_{12}の評価値と整合度の関係

図1より評価値を2としたときの整合度が最も良かった。欠落させた部分の評価値は7だったので，この部分が過大評価されていたということがわかる。表5に最終的に得られた主固有値，主固有ベクトル，整合度を示す。

表5　行列Bの改善結果

λ_{max}	5.19788
w_1	0.40836
w_2	0.32366
w_3	0.15304
w_4	0.06842
w_5	0.04653
C.I.	0.04947

次にランダム関数を用いて作成した2パターンの過大評価・過小評価されている一対比較行列，行列Cと行列Dに改善手法を行った。

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 2 & 9 \\ 1/2 & 1 & 9 & 9 & 7 \\ 1/7 & 1/9 & 1 & 8 & 6 \\ 1/2 & 1/9 & 1/8 & 1 & 4 \\ 1/9 & 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

改善手法により，式(6)の要素に欠落を作り，順位が逆転しなかったかどうかを調べた。その結果を表6に示す。表の構成は表3と同様である。

表6　行列Cの順位逆転の検証

c_{12}	×	c_{13}	×	c_{14}	○	c_{15}	○
		c_{23}	○	c_{24}	○	c_{25}	×
				c_{34}	×	c_{35}	×
						c_{46}	×

表6の○がついている4ヵ所の主固有値，主固有ベクトル，整合度を表7に示す。

表7 行列Cの順位が逆転しない場合の主固有値，主固有ベクトル，整合度

c_{14}欠落

λ_{max}	5.99218
w_1	0.44918
w_2	0.36657
w_3	0.11746
w_4	0.04036
w_5	0.02643
C.I.	0.24805

c_{15}欠落

λ_{max}	6.48656
w_1	0.40358
w_2	0.38156
w_3	0.13178
w_4	0.06248
w_5	0.02053
C.I.	0.37164

c_{23}欠落

λ_{max}	6.15155
w_1	0.44333
w_2	0.25913
w_3	0.19670
w_4	0.07413
w_5	0.02671
C.I.	0.28789

c_{24}欠落

λ_{max}	6.50254
w_1	0.38701
w_2	0.37303
w_3	0.14563
w_4	0.06928
w_5	0.02506
C.I.	0.37564

表7を見るとc_{14}を欠落にしたときが最も整合度が良いので，c_{14}で欠落にした場所に1~9を代入し整合度を導き出す。その結果を図2に示す。

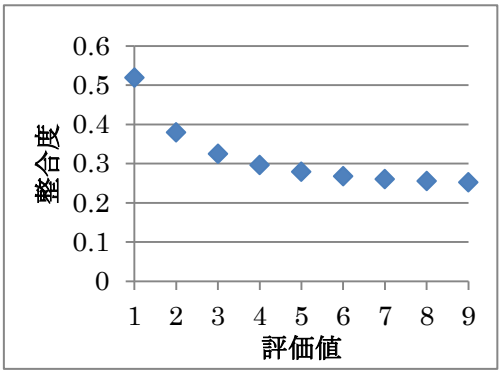

図2　c_{14}の評価値と整合度の関係

図2を見ると評価値が9のとき最も整合度がよくなる。欠落させた部分の評価値は2だったので，この部分が過小評価されていたことがわかる。表8に最終的に得られた主固有値，主固有ベクトル，整合度を示す。

表8　行列Cの改善結果

λ_{max}	6.00686
w_1	0.43949
w_2	0.37206
w_3	0.11984
w_4	0.04214
w_5	0.02646
C.I.	0.25172

表8を見ると整合度は0.1以下であることが望ましいが，0.25172であり，整合度が悪い。また、λ_{max}についても 本来は5に近づくはずだが6.00686であり、良い値とは言えない。

次に，式(7)についても同様に改善する。

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \\ 1/2 & 1 & 8 & 9 & 4 \\ 1/3 & 1/8 & 1 & 9 & 5 \\ 1/7 & 1/9 & 1/9 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/4 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

改善手法により，式(7)の要素に欠落を作り，順位が逆転しなかったかどうかを調べた。その結果を表9に示す。表の構成は表3と同様である。

表9　行列Dの順位逆転の検証

d_{12}	×	d_{13}	×	d_{14}	○	d_{15}	×
		d_{23}	○	d_{24}	×	d_{25}	×
				d_{34}	○	d_{35}	×
						d_{46}	×

表9の○がついている3ヵ所の主固有値，主固有ベクトル，整合度を表10に示す。

表10 行列Dの順位が逆転しない場合の主固有値，主固有ベクトル，整合度

d_{14}欠落

λ_{max}	5.98666
w_1	0.38770
w_2	0.38408
w_3	0.14903
w_4	0.04248
w_5	0.03671
C.I.	0.24666

d_{23}欠落

λ_{max}	5.44057
w_1	0.42985
w_2	0.24424
w_3	0.23475
w_4	0.05216
w_5	0.03899
C.I.	0.11014

d_{34}欠落

λ_{max}	5.59766
w_1	0.40800
w_2	0.38435
w_3	0.10652
w_4	0.06129
w_5	0.03984
C.I.	0.14941

表10を見るとd_{23}を欠落にしたときが最も整合度が良いので，d_{23}で欠落にした場所に1~9を代入し整合度を導き出す。その結果を図3に示す。

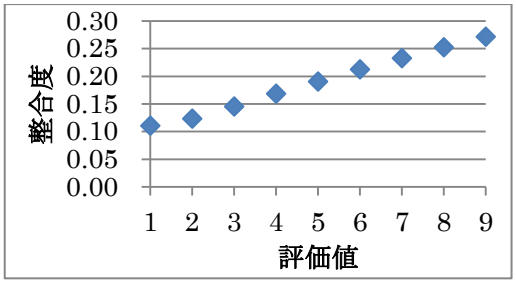

図3　d_{23}の評価値と整合度の関係

図3を見ると評価値が1のとき最も整合度が良いことがわかる。欠落させた部分の評価値は8だったので，この部分が過大評価されていたことがわかる。表11に最終的に得られた主固有値，主固有ベクトル，整合度を示す。

表11　行列Dの改善結果

λ_{max}	5.44084
w_1	0.43005
w_2	0.24243
w_3	0.23641
w_4	0.05214
w_5	0.03897
C.I.	0.11021

表11を見ると，表8と同様に整合度が0.1以上であり，整合度が良いとは言えない。

4　まとめ

今回は過大評価・過小評価のハーカー法を用いた改善方法を提案し以下のことが得られた。

(1)　順位逆転に最も影響力がある一対比較行列の要素を特定することができた。

(2)　過大評価・過小評価された部分の要素を順位が逆転せず，整合度が良くなるように改善することができた。

しかし，すべての過大評価・過小評価がある一対比較で表5のように整合度が良くさらに正しい結果になるわけではなく，表8や表11のように整合度が0.1よりも大きくなってしまう場合もある。これは2ヵ所，3ヵ所と過大評価・過小評価されているからだと思われる。今回の提案では計算回数が多くなってしまうため2ヵ所以上過大評価・過小評価されていると当てはめるのが難しく，別の方法も検討しなければならない。また，一対比較行列が大きい場合も上記の理由で使用しづらい。

今後の課題として，今回の手法を適用した際に最終的に得られた整合度が0.1以上であった場合，順位は逆転していないが，過大評価・過小評価されている要素が複数あるといえる。その要素を検討し，改善していきたいと考えている。