

Max 基準 AHP・DAP

-項目間一対比較情報から項目ウェイトを推定するプロセス DAP-

日大生産工(院)

○山田 遥輝

日大生産工

篠原 正明

1. はじめに

AHP などにおいて一対比較行列 A から各項目ウェイトを決定する評価プロセスとして、動的平均化プロセス(DAP)が提案されている。本論文では、今までの篠原研究室にお

2. 本研究までの流れ

本研究までの流れとして参考文献[1]→[2]→[3]→[4]→[5]の流れで研究されてきた。

[1]では、AHPにおいて、反復法における計算法で、算術平均、幾何平均、調和平均、一般化平均を取って計算を行うことで、固有値の収束過程にどのような関係性があるか考察を試みた研究である。

一般化平均の紹介として、下に理論式を定義できる。

$$\text{算術平均: } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$

$$\text{幾何平均: } \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n} \quad (2)$$

$$\text{調和平均: } \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (3)$$

$$\text{一般化平均: } \sqrt[m]{\frac{x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m}{n}} \quad (4)$$

この研究により、一般化平均でいくら計算を行っても、整合性がある場合、一定値に収束し、整合性がない場合、収束しないで発散するという事が考察された。

[2]では、主に評価平均モデルに基づく AHP 固有ベクトル法の一般化がパス代数における固有ベクトル概念と解釈できることを提案するという研究で、これによりパス代数の線形代数の逆行列関数は最短経路問題に、パス代数の固有値、固有ベクトルは、AHP・DAPにおける Max 演算、Min 演算に、関連していることが考察された。

[3]について、この研究がなされた理由として、トマス・サーティー(Thomas L. Saaty)博士の固有ベクトル法(固有値)より、「人は2つのものを見る時、無意識的に、良い方を考えているということなのではないか」、「理論的背景があるのではないか」という2件の仮説から始まった。そしてこの研究で、AHP 固有ベクトルを説明することができ、モデルを作ったうえで、変形が出来るようになった。例えば、Max 演算、Min 演算などである。その理論式は(5),(6)で、これを簡単にすると(7),(8)と定義できる。

Max 演算:

$$x_i(t+1) = \text{Max}\{a_{i1} \times x_1(t), a_{i2} \times x_2(t), a_{i3} \times x_3(t), a_{i4} \times x_4(t)\} \quad (5)$$

Min 演算:

$$x_i(t+1) = \text{Min}\{a_{i1} \times x_1(t), a_{i2} \times x_2(t), a_{i3} \times x_3(t), a_{i4} \times x_4(t)\} \quad (6)$$

$$x_i(t+1) = \text{Max}_{j=1, \dots, n} \{a_{ij} \times x_j(t)\} \quad (7)$$

$$x_i(t+1) = \text{Min}_{j=1, \dots, n} \{a_{ij} \times x_j(t)\} \quad (8)$$

さらに、ダイナミックスを考えると固有値が出てくるが、これが整合性に直接つながっていることが考察された。

[4]により、算術平均を用いた整合性のある一対比較行列の時、「初期値に関わらず、1回目からウェイトベクトルは安定する」、「安定した収束値は(例では)、12:6:4:3の比となる」、「初期値の一部を負の値にしても、正のウェイトベクトルに収束する。」という事が考察された。

そして次に、算術平均を用いた整合性のない一対比較行列の時、「初期値に関わらず、1回目からウェイトベクトルは安定しない」、「すべてのウェイトは発散傾向にある」という事が考察された。

[5]は、Max 演算を用いた整合性のある、逆比性がある一対比較行列についての研究である。

例 2-1 整合性のある逆比性のある時の一対比較行列

Max-criterion AHP・DAP
-Research Review-
Haruki YAMADA and Masaaki SHINOHARA

表 1.行列A

1	2	3	4
0.5	1	1.5	2
0.333333	0.666666	1	1.33333
0.25	0.5	0.75	1

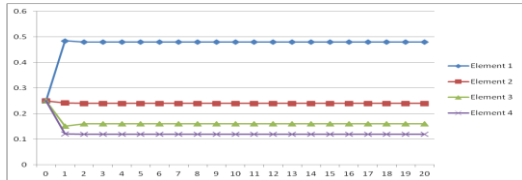


図 2-1.行列 A に対する初期値(1,1,1,1)

Max 基準下の正規化データ(逆比性あり)

例 2-2 整合性の無く、逆比性がある一対比較行列の時、逆比性を持つ時、Max 基準下の正規化データで周期 3 による一定の振動が出ることが考察された。

その中の一つを例 2-2 として示す。

例 2-2 整合性の無く、逆比性がある一対比較行列

表 2.行列B

1	6	3	4
0.166666	1	1.5	2
0.333333	0.666666	1	1.33333
0.25	0.5	0.75	1

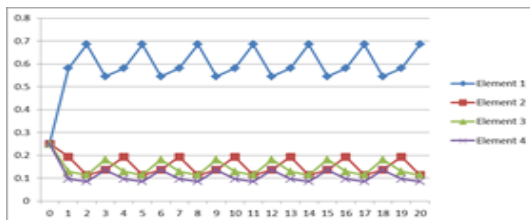


図 2-2.行列 B に対する初期値(1,1,1,1)

Max 基準下の正規化データ(逆比性あり)

そして、逆比性が 1 か所無くそれ以外では整合性がある一対比較行列の時、Max 基準下の正規データで周期 2 による一定の振動が出ることが考察された。その中の一つを例 2-3 としてあげる。

例 2-3 逆比性が 1 つ無い一対比較行列

表 3.行列C

1	6	3	4
0.5	1	1.5	2
0.333333	0.666666	1	1.33333
0.25	0.5	0.75	1

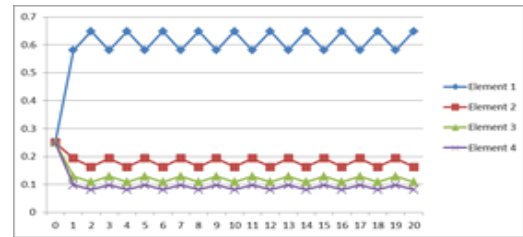


図 2-3.行列 C に対する初期値(1,1,1,1)

Max 基準下の正規化データ(逆比性なし)

[5]の研究同様、本研究でも、正規化 DAP を使うが、その必要性として、正規化 DAP を使わないと整合性ない場合、生データのグラフはずっと発散し続けてしまうからである。

3. DAP の概略

DAP は Dynamic Averaging Process の略で、動的平均化プロセスと訳す。これは、[3]より、一対比較データを基に、人が脳内で行っていると思われる項目間どうしの意思決定過程をプロセスとしてまとめたものである。

例 3-1.A さんと B さんと C さんと D さんがいます。その時の 4 人における、お金持ちの一対比較行列を作ると、表 4 になる。

表 4 : 4 人におけるお金持ちの一対比較行列

	A さん	B さん	C さん	D さん
A さん	1	2	4	2
B さん	0.5	1	2	1
C さん	0.25	0.5	1	0.5
D さん	0.5	1	2	1

この表は①~⑤という意味である。

- ① 同一人物に対する重みは全部 1 とする。例えば A さんから見て A さんは 1 倍お金持ちに見える。
- ② A さんは B さんの 2 倍お金持ちに見える。
A さんは C さんの 4 倍お金持ちに見える。
A さんは D さんの 2 倍お金持ちに見える。
- ③ B さんは A さんの 0.5 倍お金持ちに見える。
B さんは C さんの 2 倍お金持ちに見える。
B さんは D さんの 1 倍お金持ちに見える。
- ④ C さんは A さんの 0.25 倍お金持ちに見える。
C さんは B さんの 0.5 倍お金持ちに見える。
C さんは D さんの 0.5 倍お金持ちに見える。
- ⑤ D さんは A さんの 0.5 倍お金持ちに見える。
D さんは B さんの 1 倍お金持ちに見える。

DさんはCさんの2倍お金持ちに見える。

この表4を使い、初期値(1,1,1,1)を用いて、第1回目の各自のお金持ち度合を4人から評価値の算術平均を用いると(1)～(4)の式になり、第1回目ウェイト(重み)が求まる。

1回目：

Aさんのウェイト：

$$\frac{1 \times 1 + 2 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times 1}{4} = 2.25 \quad (1)$$

Bさんのウェイト：

$$\frac{0.5 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1}{4} = 1.125 \quad (2)$$

Cさんのウェイト：

$$\frac{0.25 \times 1 + 0.5 \times 1 + 1 \times 1 + 0.5 \times 1}{4} = 0.5625 \quad (3)$$

Dさんのウェイト：

$$\frac{0.5 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1}{4} = 1.125 \quad (4)$$

となる。求まった、(2.25, 1.125, 0.5625, 1.125)を用いて、同じように計算をすることで、第2回目ウェイトが求まる。

2回目：

Aさんのウェイト：

$$\frac{1 \times 2.25 + 2 \times 1.125 + 4 \times 0.5625 + 2 \times 1.125}{4} = 2.25 \quad (1')$$

Bさんのウェイト：

$$\frac{0.5 \times 2.25 + 1 \times 1.125 + 2 \times 0.5625 + 1 \times 1.125}{4} = 1.125 \quad (2')$$

Cさんのウェイト：

$$\frac{0.25 \times 2.25 + 0.5 \times 1.125 + 1 \times 0.5625 + 0.5 \times 1.125}{4} = 0.5625 \quad (3')$$

Dさんのウェイト：

$$\frac{0.5 \times 2.25 + 1 \times 1.125 + 2 \times 0.5625 + 1 \times 1.125}{4} = 1.125 \quad (4')$$

収束したので、各自のお金持ち度合のウェイトはこれで定まった。何度も計算を行い、ウェイトを何度も決めていくことにより、固有价值が求まる。

例3-2 AさんとBさんとCさんとDさんがいます。その時の4人における、お金持ちに見える度合の一対比較行列を作ると、表5になる。

表5：4人におけるお金持ちの一対比較行列

	Aさん	Bさん	Cさん	Dさん
Aさん	1	2	4	5
Bさん	0.5	1	2	1
Cさん	0.25	0.5	1	0.5
Dさん	0.2	1	2	1

この表5を使い、初期値(1,1,1,1)を用いて、第1回目の各自のお金持ち度合を4人から評価値の算術平均を用いると(5)

～(8)の式になり、第1回目ウェイト(重み)が求まる。

1回目：

Aさんのウェイト：

$$\frac{1 \times 1 + 2 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1}{4} = 3 \quad (5)$$

Bさんのウェイト：

$$\frac{0.5 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1}{4} = 1.125 \quad (6)$$

Cさんのウェイト：

$$\frac{0.25 \times 1 + 0.5 \times 1 + 1 \times 1 + 0.5 \times 1}{4} = 0.5625 \quad (7)$$

Dさんのウェイト：

$$\frac{0.2 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1}{4} = 1.05 \quad (8)$$

となる。求まった、(3, 1.125, 0.5625, 1.05)を用いて、同じように計算をすることで、第2回目ウェイトが求まる。

2回目

Aさんのウェイト：

$$\frac{1 \times 3 + 2 \times 1.125 + 4 \times 0.5625 + 5 \times 1.05}{4} = 3.1875 \quad (5'')$$

Bさんのウェイト：

$$\frac{0.5 \times 3 + 1 \times 1.125 + 2 \times 0.5625 + 1 \times 1.05}{4} = 1.2 \quad (6'')$$

Cさんのウェイト：

$$\frac{0.25 \times 3 + 0.5 \times 1.125 + 1 \times 0.5625 + 0.5 \times 1.05}{4} = 0.6 \quad (7'')$$

Dさんのウェイト：

$$\frac{0.2 \times 3 + 1 \times 1.125 + 2 \times 0.5625 + 1 \times 1.05}{4} = 0.975 \quad (8'')$$

となる。求まった、(3.1875, 1.2, 0.6, 0.975)を用いて、同じように計算をすることで第3回目ウェイトが求まる。

3回目

Aさんのウェイト：

$$\frac{1 \times 3.1875 + 2 \times 1.2 + 4 \times 0.6 + 5 \times 0.975}{4} = 3.215625 \quad (5''')$$

Bさんのウェイト：

$$\frac{0.5 \times 3.1875 + 1 \times 1.2 + 2 \times 0.6 + 1 \times 0.975}{4} = 1.242188 \quad (6''')$$

Cさんのウェイト：

$$\frac{0.25 \times 3.1875 + 0.5 \times 1.2 + 1 \times 0.6 + 0.5 \times 0.975}{4} = 0.621094 \quad (7''')$$

Dさんのウェイト：

$$\frac{0.2 \times 3.1875 + 1 \times 1.2 + 2 \times 0.6 + 1 \times 0.975}{4} = 1.003125 \quad (8''')$$

求まった、(3.215625, 1.242188, 0.621094, 1.003125)を用いて、同じように計算し、第4回目ウェイトが求まる。

4回目

Aさんのウェイト：

$$\frac{1 \times 3.215625 + 2 \times 1.242188 + 4 \times 0.621094 + 5 \times 1.003125}{4} = 3.3 \quad (5''''')$$

Bさんのウェイト：

$$\frac{0.5 \times 3.215625 + 1 \times 1.242188 + 2 \times 0.621094 + 1 \times 1.003125}{4} = 1.273828 \quad (6'')$$

Cさんのウェイト：

$$\frac{0.25 \times 3.215625 + 0.5 \times 1.242188 + 1 \times 0.621094 + 0.5 \times 1.003125}{4} = 0.636914 \quad (7'')$$

Dさんのウェイト：

$$\frac{0.2 \times 3.215625 + 1 \times 1.242188 + 2 \times 0.621094 + 1 \times 1.003125}{4} = 1.0032656 \quad (8'')$$

求まった、(3.3, 1.273828, 0.636914, 1.0032656)を用いて、同じように計算をすることで第5回目ウェイトが求まる。

5回目

Aさんのウェイト：

$$\frac{1 \times 3.3 + 2 \times 1.273828 + 4 \times 0.621094 + 5 \times 1.0032656}{4} = 3.389648 \quad (5''')$$

Bさんのウェイト：

$$\frac{0.5 \times 3.3 + 1 \times 1.273828 + 2 \times 0.621094 + 1 \times 1.0032656}{4} = 1.307578 \quad (6''')$$

Cさんのウェイト：

$$\frac{0.25 \times 3.3 + 0.5 \times 1.273828 + 1 \times 0.621094 + 0.5 \times 1.0032656}{4} = 0.653789 \quad (7''')$$

Dさんのウェイト：

$$\frac{0.2 \times 3.3 + 1 \times 1.273828 + 2 \times 0.621094 + 1 \times 1.0032656}{4} = 1.060078 \quad (8''')$$

求まった、(3.389648, 1.307578, 0.653789, 1.060078)を用いて、同じように計算し、第6回目ウェイトが求まる。

6回目

Aさんのウェイト：

$$\frac{1 \times 3.389648 + 2 \times 1.307578 + 4 \times 0.653789 + 5 \times 1.060078}{4} = 3.480088 \quad (5''')$$

Bさんのウェイト：

$$\frac{0.5 \times 3.389648 + 1 \times 1.307578 + 2 \times 0.653789 + 1 \times 1.060078}{4} = 1.342515 \quad (6''')$$

Cさんのウェイト：

$$\frac{0.25 \times 3.389648 + 0.5 \times 1.307578 + 1 \times 0.653789 + 0.5 \times 1.060078}{4} = 0.671257 \quad (7''')$$

Dさんのウェイト：

$$\frac{0.2 \times 3.389648 + 1 \times 1.307578 + 2 \times 0.653789 + 1 \times 1.060078}{4} = 1.088291 \quad (8''')$$

本例では、DAPの生データであるウェイトベクトルは一定値に収束しないが、以下に示すようにベクトル内要素和が1となるように正規化すると収束していることがわかる。

回数	生のデータ	正規化データ
1	(1,1,1,1)	(0.25,0.25,0.25,0.25)
2	(3,1.125,0.5625,1.05)	(0.52,0.2,0.1,0.18)
3	(3.1875,1.2,0.6,0.975)	(0.56,0.2,0.1,0.16)
4	(3.215625,1.242188,0.621094,1.003125)	(0.53,0.2,0.1,0.17)
5	(3.3,1.273828,0.636914,1.0032656)	(0.53,0.2,0.1,0.17)
6	(3.389648,1.307578,0.653789,1.060078)	(0.53,0.2,0.1,0.17)
7	(3.480088,1.342515,0.671257,1.088291)	(0.53,0.2,0.1,0.17)

4. 考察

算術平均DAPの本実験例において、例3-1のように整合性がある場合は、ウェイトベクトルは収束するが、例3-2のように整合性がない場合、ウェイトベクトルは収束しない。しかし、後者の場合でも重みを足して1にすることで収束していることが分かる。

参考文献

[1] 金成賢作 篠原正明：「AHP固有ベクトル法の一般化平均に基づく一般化」平成21年度 日本大学 生産工学部 第42回学術講演会(2009.12)

[2] 金成賢作 篠原正明：「評価平均モデルにもとづくAHP固有ベクトル法とパス代数における固有ベクトル」平成22年度 日本大学 生産工学部 第43回学術講演会(2010.12)

[3] 篠原正明：「AHP EIGENVECTOR VIA DYNAMIC PROCESS OF PAIRWISE COMPARISON AND AVERAGING」平成23年度イタリアソレント ISAHP(2011.6)

[4] 上久保玲 篠原正明：「一対比較平均化プロセス(その1)・一対比較平均化プロセス(その2)」平成23年度 日本大学 生産工学部 第44回学術講演会(2011.12)

[5] 藤田啓弘：「楽観判断のMAX演算、慎重判断のMIN演算にもとづくAHP」平成23年度 日本大学 生産工学部 数理情報工学科 卒業研究(2012.3)