

一般逆行列に基づく応力法による平面骨組の線形座屈解析

- 変位モードによる定式化 -

日大生産工(院) ○木村 祐貴 日大生産工 川島 晃
(株)中田捷夫研究室 常川 重樹

1. はじめに

応力法は航空機尾翼など「フレームとせん断パネルの接触問題の解法」¹⁾として発達した。多数部材から構成される建築骨組では長方形列で表現される釣合式と適合条件(正方形列)を解く必要があるため、計算効率が悪いとの理由からあまり普及していない。釣合式の一般解の解法は大別して、次の二つがある。a) ガウス・ジョルダン法を用いて、静定基本系(特解)と不静定力系(余解)に分離する解法^{1), 2)}。この解法は行列演算上の分析が必要となるため、コンピュータによる自動計算には不向きであると指摘されている³⁾。b) ムーア・ペンローズ一般逆行列⁴⁾を用いて、系全体の特解と余解を求める解法。この解法は田中博士と故・半谷裕彦博士らにより、吊り屋根や膜構造等の「不安定構造の構造問題(安定化問題)」の定式化とその理論的考察に応用された^{5) 6)}など。川島らは「構造安定問題」における釣合式の一般解の理論的考察⁵⁾に着眼して、応力法による骨組の分析法に活用している^{7) ~10)}。

本報告では弾性安定限界の分析における理論的な特徴(変位法との関係)を明確にすることおよび計算効率の向上を目的として、変位モードによる平面骨組の線形座屈解析の定式化を示す。

2. 一般逆行列に基づく材端応力の力学的内容

釣合式の一般解の解法にムーア・ペンローズ一般逆行列を用いる材端応力(断面力)の力学的内容は次の通りである。

1) 特解は、釣合いの最適近似解⁶⁾(剛体系としての材端応力)を表す。

2) 余解(余力系)は変形の適合条件式により特解を再配分する(自己釣合系)材端応力を表す。

3. 基本関係式の概要

3.1 仮定事項および記号

- 1) 部材は断面の重心線(図1の局所座標 y^1 軸)で表す。
- 2) 荷重は節点に作用するものとする。
- 3) 骨組の全体座屈のみを扱う。
- 4) 弾性安定限界に及ぼす影響としては軸力と部材回転の連成($P\Delta$ 効果)と軸力と曲げ変形の連成($P\delta$ 効果)のみを考慮する。
- 5) また、せん断変形は考慮しない。

構成式と釣合式および幾何学的関係式に用いる主な記号は次の通である。

部材(p)の独立な材端応力は、図1に示す材端(A),(B)の曲げモーメント $\mathbf{m}_{(A,p)}$ 、 $\mathbf{m}_{(B,p)}$ と軸力 $\mathbf{n}_{(p)}$ の3成分である。また、材端変形は相対たわみ角 $\tau_{(A,p)}$ 、 $\tau_{(B,p)}$ と伸縮 $\Delta\ell_{(p)}$ の3成分であり、これらをまとめて次のベクトル記号で表す。なお、行列の転置は上付添字Tで表す。

$$\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)} = [\mathbf{m}_{(A,p)}, \mathbf{m}_{(B,p)}, \mathbf{n}_{(p)}]^T \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{(N,p)} = [\tau_{(A,p)}, \tau_{(B,p)}, \Delta\ell_{(p)}]^T \quad (2)$$

ここに、(N,p)のNは単に材端を示す印である。

$\boldsymbol{\sigma}_{(N,p)}$ と $\boldsymbol{\tau}_{(N,p)}$ は、部材番号順($p=1,2,\dots$)に並べて $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\tau}$ で表す。

$$\boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma}_{(N,1)}, \boldsymbol{\sigma}_{(N,2)}, \dots]^T \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}_{(N,1)}, \boldsymbol{\tau}_{(N,2)}, \dots]^T \quad (4)$$

節点(N)に作用する力のモーメントを $\mathbf{m}_{(N)}$ 、力のベクトルを $\mathbf{f}_{(N)}$ として節点番号順($N=1,2,\dots$)

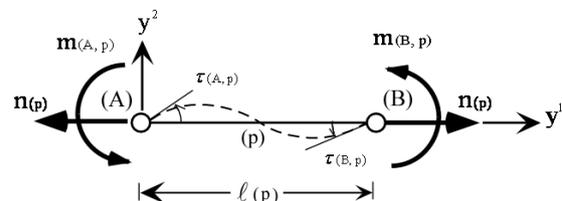


図1 部材に用いる記号

The Linear Buckling Analysis of Plane Frames by the Stress Method based on Generalized Inverse

- Formulation by displacement's mode -

Yuki KIMURA, Akira KAWASHIMA and Shigeki TSUNEKAWA

に並べて \mathbf{m} で表す。

$$\mathbf{m} = [\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \mathbf{f}^{(2)}, \dots]^T \quad (5)$$

節点(N)の節点角を $\theta^{(N)}$ 、変位ベクトルを $\mathbf{u}^{(N)}$ として節点番号 (N=1,2,…) に並べて $\boldsymbol{\theta}$ で表す。

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, \theta^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots]^T \quad (6)$$

基本関係式は無応力状態 (初期形状) を基準として定式化する。以下にその概要を述べる。

3.2 構成式

$\boldsymbol{\sigma}^{(N,p)}$ (式(1)) と $\boldsymbol{\tau}^{(N,p)}$ (式(2)) の関係は柔性行列を $\mathbf{H}_{(p)}$ とすると、

$$\boldsymbol{\tau}^{(N,p)} = \mathbf{H}_{(p)} \boldsymbol{\sigma}^{(N,p)} \quad (7)$$

ここに、断面主軸に関する断面二次モーメントを $I_{(p)}$ 、部材(p)の断面積を $A_{(p)}$ 、材長を $\ell_{(p)}$ とすると、 $\mathbf{H}_{(p)}$ は弾性曲線式より式(8)で表せる。

$$\mathbf{H}_{(p)} = \begin{bmatrix} 2h_{(p)} & -h_{(p)} & 0 \\ -h_{(p)} & 2h_{(p)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{(p)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここに、

$$h_{(p)} = \frac{\ell_{(p)}}{6EI_{(p)}}, \quad S_{(p)} = \frac{\ell_{(p)}}{EA_{(p)}} \quad (9-1, 2)$$

式(7)は系全体に対して次式で表す。

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \quad (10)$$

ここに、 \mathbf{H} は柔性行列 $\mathbf{H}_{(p)}$ (式(8)) を部材番号順に対角項に並べた (m, m) 型行列である (m : 材端応力数 (=部材数 \times 3))。

3.3 釣合式

釣合式は次式で表す。

$$\mathbf{m} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} \quad (11)$$

上式右辺の \mathbf{D} は釣合行列であり、部材の局所座標 $y^1 - y^2$ 軸上に沿う単位ベクトル $\mathbf{a}^1_{(p)}, \mathbf{a}^2_{(p)}$ (図2) で構成される。節点角・節点変位の自由度数を n とすると \mathbf{D} は (n, m) 型行列となる。

3.4 幾何学的関係式

$\boldsymbol{\tau}$ (式(4)) と $\boldsymbol{\theta}$ (式(6)) の関係は、式(12)で表せる。

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\theta} \quad (12)$$

3.5 P Δ 効果

P Δ 効果は、図3に示すように軸力 $n_{(p)}$ の方向変化に伴う局所座標 y^2 軸方向の成分力 $n^2_{(p)}$ で表す。部材の (微小) 剛体回転を $r_{(p)}$ 、相対変位を

$\Delta d^2_{(p)}$ とすると、 $n^2_{(p)}$ は式(13)で表せる。

$$\begin{aligned} n^2_{(p)} &= n_{(p)} \sin(r_{(p)}) \doteq n_{(p)} \frac{\Delta d^2_{(p)}}{\ell_{(p)}} \\ &= \frac{n_{(p)}}{\ell_{(p)}} \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^2_{(p)T} & \mathbf{a}^2_{(p)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(A,p)} \\ \mathbf{u}^{(B,p)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

$n^2_{(p)}$ は全体座標系に変換し、材端(A),(B)に及ぼす力のベクトルを $\tilde{\mathbf{n}}^2_{(A,p)}, \tilde{\mathbf{n}}^2_{(B,p)}$ と置くと、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}^2_{(A,p)} \\ \tilde{\mathbf{n}}^2_{(B,p)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^2_{(p)} \\ \mathbf{a}^2_{(p)} \end{bmatrix} n^2_{(p)} \\ &= \left(\frac{n_{(p)}}{\ell_{(p)}} \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^2_{(p)} \\ \mathbf{a}^2_{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^2_{(p)T} & \mathbf{a}^2_{(p)T} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(A,p)} \\ \mathbf{u}^{(B,p)} \end{bmatrix} \\ &\quad \dots (14) \end{aligned}$$

また、 $\tilde{\mathbf{n}}^2_{(A,p)}, \tilde{\mathbf{n}}^2_{(B,p)}$ が節点(N=A,B)に及ぼす力のベクトルを $\mathbf{P}_{\Delta(N)}$ で表す。これを節点番号 (N=1,2,…) に並べて \mathbf{P}_{Δ} (式(15)) で表す。

$$\mathbf{P}_{\Delta} = [0, \mathbf{P}_{\Delta(1)}, 0, \mathbf{P}_{\Delta(2)}, \dots]^T \quad (15)$$

骨組が構成されたとき、材端変位 $\mathbf{u}^{(A,p)}, \mathbf{u}^{(B,p)}$ (式(14)) は節点(N=A,B)の変位ベクトル $\mathbf{u}^{(N)}$ に等しいから、系全体の節点角・節点変位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ (式(6)) を用いると、 \mathbf{p}_{Δ} は次式のように表せる。

$$\mathbf{p}_{\Delta} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\theta} \quad (16)$$

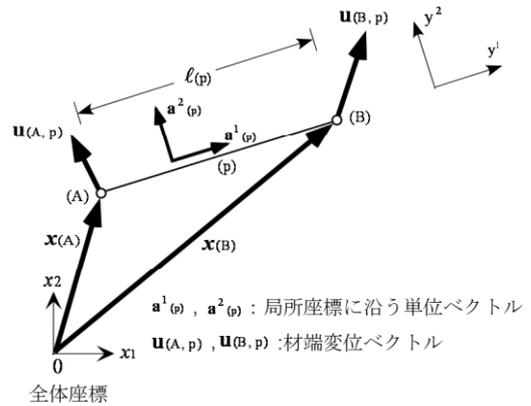


図2 部材の材端変位ベクトル

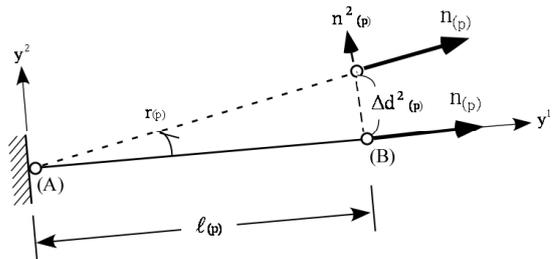


図3 P Δ 効果

式(16)の Λ は式(14)右辺の()内を系全体に亘ってまとめた (n, n) 型行列である。

3.6 P δ 効果

軸力 $n_{(p)}$ と材軸 y^1 上の任意点におけるたわみ δ によって材端(A),(B)に付加される曲げを $p_{\delta(A,p)}, p_{\delta(B,p)}$ とし、まとめて $p_{\delta(N,p)}$ (式(17))で表す。 $p_{\delta(N,p)}$ は弾性曲線式より材端の変形 $\tau_{(N,p)}$ (式(2))を用いて式(18)のように表せる。

$$p_{\delta(N,p)} = [p_{\delta(A,p)}, p_{\delta(B,p)}, 0]^T \quad (17)$$

$$p_{\delta(N,p)} = K_{\delta(p)} \tau_{(N,p)} \quad (18)$$

上式の $K_{\delta(p)}$ は

$$K_{\delta(p)} = n_{(p)} \ell_{(p)} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$p_{\delta(N,p)}$ (式(18))は全体座標系に変換し、系全体に亘ってまとめ p_{δ} とおくと、次式で表せる。

$$p_{\delta} = DK_{\delta} D^T \theta \quad (20)$$

ここに、 K_{δ} は行列 $K_{\delta(p)}$ (式(19))を部材番号順に対角項に並べた (m, m) 型行列である。

4. 釣合式の一般解と変形の適合条件式

無応力状態に荷重 m が作用したとき(現時点の釣合)の安定条件に関わる釣合式の一般解と適合条件式を定式化する。P Δ 効果とP δ 効果を考慮した釣合式は、式(11)と式(16)および式(20)の線形和で与えられる。

$$m = D\sigma + P_{\Delta} + P_{\delta} \quad (21)$$

ムーア・ペンローズ一般逆行列は、肩付き+で表す。釣合式(式(21))の一般解 σ は次式のように表せる。

$$\sigma = \sigma^P + \sigma^C \quad (22)$$

上式右辺 σ^P は特解である。

$$\sigma^P = D^+ (m - P_{\Delta} - P_{\delta}) \quad (23)$$

ここに、 (n, m) 型行列 D のランクは n ($\leq m$)であり、 D^+ は (n, n) 型の対称行列 DD^T を用いて、単純な行列演算(式(24))で求まる。

$$D^+ = D^T (DD^T)^{-1} \quad (24)$$

式(22)右辺の σ^C は余解(荷重ベクトル $m=0$ の解)であり、式(25)で与えられる。

$$\sigma^C = (I - D^+ D) \beta \equiv G\gamma \quad (25)$$

$$G = [g_1, g_2, \dots, g_r] \quad (g_i : \text{独立ベクトル}) \quad (26)$$

式(26)の添え字 r は不静定次数($=m-n$)である。式(25)の I は (m, m) 型単位行列、 β は任意ベクトルである。また、 (m, m) 型係数行列 $(I - D^+ D)$ はその独立な列ベクトル g_i (自己釣合応力モード)で作る (m, r) 型行列 G (式(26))で表す。なお、 g_i の導出は $(I - D^+ D)$ にグラムシュミットの直交化法を用いると計算効率が良い⁶⁾。

次に、変形の適合条件式は自己釣合応力モード g_i (式(26))を仮想力とすると、次式のように表せる。

$$G^T \tau = G^T H \sigma = 0 \quad (27)$$

節点角・節点変位ベクトル θ は、系全体の幾何学的関係式(式(12))より次式で表せる。

$$\theta = (D^+)^T \tau = (D^+)^T \tau \quad (28)$$

5. 応力法方程式と変位法方程式

変形の適合条件式(式(27))は式(22)と式(25)より次式で表せる。

$$G^T H (\sigma^P + \sigma^C) = G^T H (\sigma^P + G\gamma) = 0 \quad (29)$$

上式右辺において、

$$C = G^T H G \quad (C : (r, r) \text{型対称行列}) \quad (30)$$

とおくと、任意ベクトル γ は次式で与えられる。

$$\gamma = -C^{-1} G^T H \sigma^P \quad (31)$$

余解 σ^C (式(25))は

$$\sigma^C = -GC^{-1} G^T H \sigma^P \quad (32)$$

となる。上式より、 σ^C は現時点の柔性関係により特解 σ^P を再配分する(自己釣合系の)材端応力を表していることが分かる。

一般解(式(22))に σ^C (式(32))を代入する。

$$\sigma = (I - GC^{-1} G^T H) \sigma^P \quad (33)$$

ここに、 σ^P は式(23)である。

θ (式(28))は構成式(式(10))を用いると、

$$\theta = (D^+)^T H \sigma \quad (34)$$

となる。上式右辺 σ に式(33)と式(23)を代入する。

$$\theta = (D^+)^T H (I - GC^{-1} G^T H) D^+ (m - P_{\Delta} - P_{\delta}) \quad \dots (35)$$

上式に式(16)と式(20)を代入して整理する。

$$Ks^{-1} = (D^+)^T H (I - GC^{-1} G^T H) D^+ \quad (36)$$

とおくと、式(35)は次式のように表せる。

$$\theta = Ks^{-1} \{ m - (\Lambda + DK_{\delta} D^T) \theta \} \quad (37)$$

式(37)より、節点角・節点変位ベクトルで表現する応力法方程式は次式で表せる。

$$\{\mathbf{I} + \mathbf{K}_s^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{K}_\delta\mathbf{D}^T)\}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{m} \quad (38)$$

次に、変位法方程式との関係性を示す。

構成式(式(10)) 逆関係は次式で表せる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\tau} \quad (39)$$

無応力状態の釣合式(式(11))は、

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{D}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{D}^T)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{m} \quad (40)$$

P Δ 効果と P δ 効果を考慮した釣合式(式(21))は式(16)と式(20)より次式のようになる。

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P}_\Delta + \mathbf{P}_\delta = (\mathbf{D}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{D}^T + \mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{K}_\delta\mathbf{D}^T)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{m} \quad (41)$$

上式右辺第1項において、次の記号を用いる。

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{D}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{D}^T \quad (42)$$

ここに、 \mathbf{K}_d は力学的境界条件を考慮した系全体の線形剛性行列である。したがって、式(41)は両辺に \mathbf{K}_d^{-1} 掛けると次式のように表せる。

$$\{\mathbf{I} + \mathbf{K}_d^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{K}_\delta\mathbf{D}^T)\}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{K}_d^{-1}\mathbf{m} \quad (43)$$

応力法方程式(式(38))の力学的内容は次の通である。まず、 \mathbf{K}_s^{-1} (式(36))を再録する。

$$\mathbf{K}_s^{-1} = (\mathbf{D}^+)^T \mathbf{H}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{H})\mathbf{D}^+ \quad \text{再録 (36)}$$

1) 不静定骨組(自由度数 $n < m$)では、式(36)右辺の()内第2項 $\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{H}$ は変形の適合条件を満たすための柔性を表している。

2) 静定骨組(自由度数 $n = m$)では、線形剛性行列の逆行列(式(36)の \mathbf{K}_s^{-1} と式(42)の \mathbf{K}_d^{-1})は同一式となる。つまり、次式が成立する。

$$(\mathbf{D}^+)^T \mathbf{H}\mathbf{D}^+ = (\mathbf{D}^{-1})^T \mathbf{H}\mathbf{D}^{-1} \quad (44)$$

6. 変位モードによる線形座屈解析の定式化

荷重 \mathbf{m} は、慣例に習い比例定数 λ と荷重成分の相対的な大きさを表す $\bar{\mathbf{m}}$ を用いて式(45)で表す。

$$\mathbf{m} = \lambda\bar{\mathbf{m}} \quad (45)$$

応力法方程式(式(38))において、節点角・節点変位 $\boldsymbol{\theta}$ に関する柔性行列が特異、すなわち、

$$\{\mathbf{I} + \mathbf{K}_s^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{K}_\delta\mathbf{D}^T)\} = \mathbf{0} \quad (46)$$

のとき、 $\boldsymbol{\theta}$ の唯一な解は定まらないので座屈したことになる。 $\bar{\mathbf{m}}$ による部材(p)の軸力を $\bar{\mathbf{n}}_{(p)}$ とし、 $\mathbf{n}_{(p)}$ を成分とする式(38)の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{K}_\delta$ を $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{K}}_\delta$

とおくと、線形座屈方程式は次式で表せる。

$$\{\mathbf{I} + \lambda\mathbf{K}_s^{-1}(\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{K}}_\delta\mathbf{D}^T)\}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (47)$$

変位法についても、同様に次式で表せる。

$$\{\mathbf{I} + \lambda\mathbf{K}_d^{-1}(\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{K}}_\delta\mathbf{D}^T)\}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (48)$$

上2式は標準固有値問題に変換できる。 \mathbf{K}_s^{-1} と \mathbf{K}_d^{-1} の力学的関係は第5節で述べている。

7. あとがき

以上、P Δ 効果と P δ 効果を独立成分として、変位モードによる平面骨組の線形座屈解析を定式化した。また、変位法との関係性を考察した。

1) 変位法を補間する理論的内容としては、座屈荷重と材端応力・変位モードに及ぼす適合条件(柱梁材の剛比関係)の影響を分析できる(第5節)。

2) アルゴリズムについては自己釣合系の材端応力モード \mathbf{g}_i (式(26))の計算が追加されるため変位法に比べ煩雑となることは否めないが、釣合式と適合条件式を結合する解法(応力の未知数 m)³⁾に比べ、計算効率はかなり改善される。

参考文献

- 1) Robinson, J. : Integrated Theory of Finite Element Methods, John Wiley & Sons, 1973
- 2) Kaneko, I. : Lawo, H. and Thierauf, G. On computational procedures for the force method. Int. J. Numer. Methods Eng. 18: 1469-1495, 1983
- 3) Raju, Krishnam N.R.B. and Nagabhushanam, J. : Nonlinear structural analysis using integrated force method. In: Sadhana Academy Proceedings In Engineering Sciences, 25, pp.353-365., 2000
- 4) 柳井晴夫, 竹内: 射影行列・一般逆行列・特異値分解, 東京大学出版会, 1983. 7
- 5) 田中尚, 半谷裕彦: 不安定トラスの剛体変位と安定化条件, 日本建築学会論文報告集, NO. 356, pp. 35-42, 1985. 10
- 6) 半谷裕彦, 川口健一: 形態解析・一般行列の応用, 培風館, 1991. 4
- 7) 花井重孝, 川島晃, 石丸麟太郎, 田中尚: 立体ラーメンの微小変位応力解析(その2 応力法), 日本建築学会構造系論文集, 第570号, pp. 61-68, 2003. 8
- 8) 川島晃, 花井重孝: 一般逆行列に基づく応力法による立体トラスの有限変位応力解析, 構造工学論文集, Vol. 54B, pp. 241-250, 2008. 3
- 9) A. Kwashima, Y. takeuchi, and S. Hanai: Shape Analysis of Self-Equilibrating Cable Networks with Initial Tension Adjusted by Stress Method, Journal of Structural Engineering, Vol. 57B, pp. 47-54, 2011. 3
- 10) 塚越達也: 応力法による平面骨組の線形座屈解析, 平成23年度修士論文梗概集, 日本大学大学院生産工学研究科建築工学専攻