満点ダミー代替案を用いたAHPにおける正規化手法の研究

日大生産工 西澤一友

1 はじめに

意思決定の一手法である Analytic Hierarchy Process(AHP) では、代替案どうしの一対比較行列より主固有値を求め、それに対応する主固有ベクトルをウエイトとして代替案を評価するのが一般的解法である。固有ベクトルを用いることはそのスカラー倍を許すことであり、固有ベクトルの正規化方法によって、問題点が生じる場合が以前から指摘されている。

まず、Belton and Gear[1] による指摘では、新しく代替案を追加することにより、追加前の代替案の評価順位が逆転する現象が示されている。この原因として、評価基準に対する各代替案の評価のウエイト、すなわち固有ベクトルを総和 1 に正規化することが一因と考えられている。また、木下らは早くから、各代替案の評価のウエイトを総和 1 に正規化することの危険性を指摘し、改善手法として支配型 AHP[5, 6] を提案している。同様に総和 1 に正規化しない手法として、Belton-Gear model[2]、Referenced model[3]、Linking pins model[4] などが提案されている。しかし、これらの提案は代替案の評価順位が逆転する現象が起こらないことに重点が置かれて考えられたものであり、正規化に関しては未解決部分が多い。

そこで本研究では、例題を通して総和 1 を用いない適切な正規化方法を検討する。

検討結果から、満点ダミー代替案を追加して、そのウエイトで代替案のウエイトを正規化する方法を提案する。

2 例題と AHP との対応

AHP では正解のわからない問題に適用できることが利点であるが、しかし正解がわからないゆえに、

意思決定後の検証がうまく行われていないのが現状である。そこで、検証可能で AHP の適用に構造が似ている例題を通して、正規化の問題点を再確認する。ただし、この例題は総和を求めるだけの問題であり、通常、AHP は適用しない例である。

例題として取り上げるのは表 1 に示す、学生の成績評価のデータである。各学生の成績は演習、宿題、レポート、試験の 4 項目の合計で評価される。

表 1 例題データ

学生	演習 (c_1) 20 点	宿題 (c_2) 20 点	レポート (c_3) 10 点	試験 (c_4) 50 点	合計点
a_1	20 点	12 点	10 点	35 点	77 点
a_2	20 点	18 点	10 点	44 点	92 点
a_3	19 点	12 点	9 点	4 点	44 点
a_4	16 点	13 点	7 点	26 点	62 点
a_5	20 点	17 点	10 点	34 点	81 点

表 1 のデータと AHP との対応をとると、学生 ($a_1 \sim a_5$) が代替案、演習 (c_1)、宿題 (c_2)、レポート (c_3)、試験 (c_4) が評価基準である。また、評価基準のウエイトは配点、代替案のウエイトは学生の得点、そして、総合ウエイトが合計点となる。

通常の評価方法は学生の得点を足し合わせて合計点を求める。AHP の手法に合わせると式 (1) のようになる。

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 & 10 & 35 \\ 20 & 18 & 10 & 44 \\ 19 & 12 & 9 & 4 \\ 16 & 13 & 7 & 26 \\ 20 & 17 & 10 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 92 \\ 44 \\ 62 \\ 81 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式 (1) で、評価基準のウエイトをすべて 1 にしたことは、単に合計点を求めているだけである。ここ

Study on a normalization method based on dummy alternative
with perfect score in the AHP
Kazutomo NISHIZAWA

で、配点を評価基準と考え、得点を配点で正規化して合計点を求めると式 (2) のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.60 & 1.00 & 0.70 \\ 1.00 & 0.90 & 1.00 & 0.88 \\ 0.95 & 0.60 & 0.90 & 0.08 \\ 0.80 & 0.65 & 0.70 & 0.52 \\ 1.00 & 0.85 & 1.00 & 0.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 92 \\ 44 \\ 62 \\ 81 \end{bmatrix} \quad (2)$$

さらに、評価基準である配点を合計 100 ではなく、合計 1 に正規化して各合計点を求めると式 (3) のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.60 & 1.00 & 0.70 \\ 1.00 & 0.90 & 1.00 & 0.88 \\ 0.95 & 0.60 & 0.90 & 0.08 \\ 0.80 & 0.65 & 0.70 & 0.52 \\ 1.00 & 0.85 & 1.00 & 0.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.77 \\ 0.92 \\ 0.44 \\ 0.62 \\ 0.81 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式 (3) の結果は合計点の満点が 100 点ではなく、1 となっている。そして、各合計点を総和 1 に正規化すると正解は式 (4) のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0.216292 \\ 0.258427 \\ 0.123596 \\ 0.174157 \\ 0.227528 \end{bmatrix} \quad (4)$$

したがって、この例題に対してある方法で代替案のウェイトを正規化し、総合ウェイトを求めたとき、得られた結果が式 (4) と一致すれば、適切な正規化手法であると確かめられる。

3 総和 1 正規化の問題点

AHP では、正規化しても影響がない部分と正規化すれば影響がある部分とがあるので明確にしておく。まず、影響がない部分は評価基準のウェイトと総合ウェイトである。評価基準のウェイトは総合化のためのスカラー倍を指定するだけなので問題はない。総合ウェイトは最終結果であり、その表現としては代替案の割合を知るために総和を 1 にしたり最大値を 1 にしたりするだけなので、これも問題はない。問題なのは評価基準に対する代替案のウェイトを正規化することである。指摘されている代替案のウェイトを総和 1 に正規化した場合の問題点を明らかにする。

表 1 に示したデータについて、各評価基準に対する代替案のウェイトを総和 1 に正規化したものを表 2 に示す。たとえば、表 2 では演習 (c_1) に対する各学生の得点の総和を 1 に変換している。

表 2 代替案総和 1 正規化

学生	演習 (c_1)	宿題 (c_2)	レポート (c_3)	試験 (c_4)
	0.20	0.20	0.10	0.50
a_1	0.211	0.167	0.217	0.245
a_2	0.211	0.250	0.217	0.308
a_3	0.200	0.167	0.196	0.028
a_4	0.168	0.181	0.152	0.182
a_5	0.211	0.236	0.217	0.238

式 (3) と同様に計算し、総合ウェイトを求めると、式 (5) のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0.21 & 0.16 & 0.21 & 0.24 \\ 0.21 & 0.25 & 0.21 & 0.30 \\ 0.20 & 0.16 & 0.19 & 0.02 \\ 0.16 & 0.18 & 0.15 & 0.18 \\ 0.21 & 0.23 & 0.21 & 0.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.220 \\ 0.268 \\ 0.107 \\ 0.176 \\ 0.230 \end{bmatrix} \quad (5)$$

この結果は総合ウェイトの総和が 1 となるので、式 (4) と比較できる。式 (5) の値は、式 (4) と近い値ではあるが異なっていることがわかる。このように、代替案のウェイトの正規化の方法が適切でないと正解は得られないことがわかる。したがって、代替案のウェイトを総和 1 に正規化することは望ましくないことがわかる。

4 提案する正規化手法

前述のように代替案のウェイト総和 1 の正規化は、解法に問題はなくても正しい結果が得られないことを示した。実測データを用いれば正解は得られるが、それでは特殊な場合であって、一般的ではない。また、AHP の利点が生かされない。すなわち、一対比較行列から固有値と固有ベクトルを求めるためには必ず何らかの正規化が行われる。そのため、適切な正規化手法の確立が必要である。

正規化手法としては過去の研究より、代替案ウェイトの最大値または最小値を 1 に正規化すると比較的良い結果が得られている [7, 8, 9, 10]。しかし、すべてがうまくいっているわけではなく、まれに不具合を生じる場合もある。このことをヒントに新しい正規化手法を提案する。

まず、表 1 のデータについて各評価基準に対する得点の最大値 1 に正規化したものを表 3 に示す。

表 3 最大値 1 正規化

学生	演習 (c_1)	宿題 (c_2)	レポート (c_3)	試験 (c_4)
	0.20	0.20	0.10	0.50
a_1	1.000	0.667	1.000	0.795
a_2	1.000	1.000	1.000	1.000
a_3	0.950	0.667	0.900	0.091
a_4	0.800	0.722	0.700	0.591
a_5	1.000	0.944	1.000	0.773

表 3 をもとに総合ウエイトを計算した結果を式 (6) に示す。

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.66 & 1.00 & 0.79 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 0.95 & 0.66 & 0.90 & 0.09 \\ 0.80 & 0.72 & 0.70 & 0.59 \\ 1.00 & 0.94 & 1.00 & 0.77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.831 \\ 1.000 \\ 0.459 \\ 0.670 \\ 0.875 \end{bmatrix} \quad (6)$$

さらに、式 (6) の結果を総和 1 に正規化すると、式 (7) となり、正解である式 (4) とは近い値ではあるが異なっていることがわかる。

$$\begin{bmatrix} 0.216704 \\ 0.260756 \\ 0.119632 \\ 0.174680 \\ 0.228228 \end{bmatrix} \quad (7)$$

総合ウエイトの計算結果が異なった原因は、表 1 と表 3 より明らかである。それは、評価基準の宿題 (c_2) と試験 (c_4) において、配点に対して満点ではないけれど、代替案の中では最高得点の学生 (a_2) の得点を 1 と正規化してしまったからである。

このことを考慮し、新しい正規化手法として以下の方法を提案する。すなわち、各評価基準の配点に対してすべて満点評価の代替案 (満点ダミー) を作為的に加え、その評価のウエイトを 1 として正規化する。手順は以下のとおりである。

- (1) 一対比較行列に満点評価、すなわち 9 段階評価ならば、一対比較値をすべて 9 としたダミーの代替案を追加する。
- (2) 満点ダミー代替案のウエイトを 1 として各代替案のウエイトを正規化する。

ただし、満点ダミーは代替案のウエイトの正規化に用いるだけで、実際の代替案には加えない。

5 適用例

今回提案した正規化手法を表 1 に示した例題について適用してみる。ただし、この適用例では一対比較行列からの適用ではなく、代替案のウエイトが得られた状態から正規化を行い、総合ウエイトを求めるまでの適用である。満点ダミー代替案を d とし、各得点をすべて満点としたデータを追加したものを表 4 に示す。

表 4 満点ダミーの追加

学生	演習 (c_1)	宿題 (c_2)	レポート (c_3)	試験 (c_4)	合計点
	20 点	20 点	10 点	50 点	
a_1	20 点	12 点	10 点	35 点	77 点
a_2	20 点	18 点	10 点	44 点	92 点
a_3	19 点	12 点	9 点	4 点	44 点
a_4	16 点	13 点	7 点	26 点	62 点
a_5	20 点	17 点	10 点	34 点	81 点
d	20 点	20 点	10 点	50 点	100 点

次に、表 4 の満点ダミー代替案 (d) の各得点をすべて 1 として各代替案の得点を正規化した数値を表 5 に示す。

表 5 例題への適用

学生	演習 (c_1)	宿題 (c_2)	レポート (c_3)	試験 (c_4)	合計点
	20 点	20 点	10 点	50 点	
a_1	1.000	0.600	1.000	0.700	77
a_2	1.000	0.900	1.000	0.880	92
a_3	0.950	0.600	0.900	0.080	44
a_4	0.800	0.650	0.700	0.520	62
a_5	1.000	0.850	1.000	0.680	81
d	1.000	1.000	1.000	1.000	100

表 5 では最大値 1 へ正規化した以前の手法が改善され、評価基準の宿題 (c_2) と試験 (c_4) の最高得点が配点満点ではない代替案は 1 となっていないことがわかる。

表 5 をもとにして、満点ダミー代替案を除いた代替案データで計算した総合ウエイトを式 (8) に示す。

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.60 & 1.00 & 0.70 \\ 1.00 & 0.90 & 1.00 & 0.88 \\ 0.95 & 0.60 & 0.90 & 0.08 \\ 0.80 & 0.65 & 0.70 & 0.52 \\ 1.00 & 0.85 & 1.00 & 0.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.77 \\ 0.92 \\ 0.44 \\ 0.62 \\ 0.81 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式 (8) の結果は式 (3) とぴったり一致している。また、総合ウエイトの総和を 1 とすると、式 (9) となる。

$$\begin{bmatrix} 0.216292 \\ 0.258427 \\ 0.123596 \\ 0.174157 \\ 0.227528 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式 (9) は正解である式 (4) とぴったり一致する。したがって、提案した正規化手法が適切であることが示された。

6 まとめ

AHP では、代替案のウエイトの正規化方法に問題があることが以前から指摘されていた。特に代替案のウエイトの総和 1 正規化には問題があるが、まだ未解決な部分が残されていた。

本報告では、AHP で従来行われている代替案のウエイトの総和 1 正規化に代わる方法をとって、満点ダミー代替案をもとにした代替案のウエイトの正規化方法を提案した。そして、適用例の結果から以下のことが得られた。

- (1) 満点ダミー代替案を加えることにより、そのウエイトを 1 として他の代替案のウエイトを正規化する方法を提案した。
- (2) 成績評価の例題に適用し、総合ウエイトが正しく得られることを確認した。

以上のことから、今回提案した提案した正規化手法が適切であることが示された。

今後の検討課題として、次の 2 点が挙げられる。まず、今回提案した正規化手法について一対比較行列からの検証が必要であること。そして、さらにいくつかの実例問題への適用で提案手法の妥当性の確認が必要である。

参考文献

- [1] V. Belton and T. Gear: On a Shortcoming of Saaty's method of Analytic Hierarchies, *Omega*, **11** (1983) 228-230.
- [2] V. Belton and T. Gear: The legitimacy of rank reversal – A comment, *Omega*, **13** (1985) 143-145.
- [3] B. Schoner and W. C. Wedley: Ambiguous criteria weights in AHP: Consequences and solutions, *Decision Sciences*, **20** (1989) 462-475.
- [4] B. Schoner, W. C. Wedley and E. U. Choo: A unified approach to AHP with linking pins, *European Journal of Operational Research*, **13** (1993) 384-392.
- [5] 木下栄蔵：階層分析手法による多目的意思決定問題への適用に関する研究、*交通工学*、**28** (1993) 35-44.
- [6] E. Kinoshita and M. Nakanishi: Proposal of new AHP model in light of dominant relationship among alternatives, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **42** (1999) 180-197.
- [7] 西澤一友：2 クラス ANP の超行列簡易作成、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2005 年度秋季研究発表会、pp142-143.
- [8] 西澤一友：3 段階評価と 2 クラス ANP による意思決定者のための簡易 AHP、*Journal of Japanese Symposium on The Analytic Hierarchy Process*, **1** (2007) 97-104.
- [9] 木下栄蔵、西澤一友：支配型 AHP から見た転置行列 ANP、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2009 年度春季研究発表会、pp82-83.
- [10] 西澤一友：転置行列 ANP での問題点とその改良、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2009 年度秋季研究発表会、pp156-157.