

最適パケット長決定の数理モデル

- ATMセルとIPパケット -

日大生産工

○篠原 正明

1. はじめに

確率的な情報源から x (bps)のビット流が発生し、それをパケット長 z (bit)のパケットにヘッダ長 d (bit)のヘッダを付与して詰め込み、ビット速度 V (bps)のデジタル回線で、それらのパケットを伝送する際の総遅延時間 T を最小化するパケット長 z 決定問題を扱う(図1)。ヘッダ長 d は固定値なので、パケット長 z を長くすれば、ヘッダによるオーバーヘッド分減少により処理効率が上昇するが、パケット長 z を短くすれば、細分化による統計的多重化によるトラヒック平滑化が達成され、両者のトレードオフとして最適パケット長が決定する。なお、ここで、パケットの情報ビット部以外の余分な部分をまとめて「ヘッダ」と言う。

$$h = \frac{z}{V} \quad (\text{秒}) \quad (3)$$

ビット収集の時間長 u (秒)を長くすれば、パケット形成数は少なく、逆に u を短くすれば、パケット形成数を多くする必要がある。従って、デジタル回線に加わるパケットの生起率 p (秒⁻¹)は、(4)式で与えられる。

$$p = \frac{1}{u} \quad (\text{秒}^{-1}) \quad (4)$$

デジタル回線に加わる呼量 a (アーラン)は、(5)式で与えられるので、デジタル回線を捕捉するまでのバッファ内待ち時間 W (秒)は $M/M/1$ のアーランC式を用いて、(6)式で評価できる。

$$a = ph \quad (\text{アーラン}) \quad (5)$$

$$W = \frac{ah}{1-a} \quad (\text{秒}) \quad (6)$$

2. ビット発生 of トラフィックモデル

1秒当たり平均 x ビット、すなわち、 x bpsの確率的情報発生源を考える。すると、時間長 u 秒の間に(1)式の平均ビット量が発生する。

$$\text{平均ビット量} = xu \quad (\text{bit}) \quad (1)$$

発生 of 確率分布が規定されれば、ビット量の分布も推定できるが、平均値で議論する範囲では(1)で十分である。

3. パケット形成 of トラフィックモデル

時間長 u 秒の間のビット総量をパケットに詰め込み、これにヘッダ長 d のヘッダを付与したパケットの平均ビット量 z は(2)式で与えられる。

$$z = xu + d \quad (\text{bit}) \quad (2)$$

4. パケット伝送 of トラフィックモデル

ビット速度 V (bps)のデジタル回線でのパケット伝送時間 h (秒)は(3)式で与えられる。

5. 総平均遅延時間 T 評価

図1において、ビット発生からデジタル回線での伝送完了までの総平均遅延時間 T は(7)で評価できる。

$$T = ku + w + h$$

$$= ku + \frac{h}{1-a} \quad (7)$$

ここで、右辺第1項の ku は、ビット発生からパケット形成までのビット当たりの遅延時間であり、平均的には $k=0.5$ である。

6. 総遅延時間 T の最小化

(7)式に一連の式(2)~(5)式を代入すると、(8)式を得る。

$$T = ku + \frac{h}{1-a} = ku + \frac{xu^2 + du}{(V-x)u-d} \quad (8)$$

パケット発生後の遅延時間をDとすれば、(8)の右辺第2項により、(9)式を得る。

$$D = \frac{xu^2 + du}{(V-x)u-d} \quad (9)$$

(9)の分子はuの増加と共に増加するが、分母はuの増加と共に、 $V-x > 0$ と $分母 > 0$ に注意すれば、同様に増加し、従って分数全体でuの変化に対して最小値 u^* を持ち、これは(10)式すなわち(11)式の2次方程式の根(12)として求まる。

$$\frac{\partial D}{\partial u} = \frac{(2xu+d)((V-x)u-d) - (xu^2+du)(V-x)}{((V-x)u-d)^2} = 0 \quad (10)$$

$$x(V-x)u^2 - 2xdu - d^2 = 0 \quad (11)$$

$$(11)の根 = \frac{d\left(1 \pm \sqrt{\frac{V}{x}}\right)}{V-x} \quad (12)$$

$V-x > 0$ あるいは $V/x > 1$ に注意すると、 u^* は負にはなりえないので、(13)となる。

$$u^* = \frac{d\left(1 + \sqrt{\frac{V}{x}}\right)}{V-x} \quad (\text{秒}) \quad (13)$$

次に、Tの最小化条件(14)を考察する。

$$\frac{\partial T}{\partial u} = k + \frac{\partial D}{\partial u} = 0 \quad (14)$$

(14)に(10)を代入すると、(15)、(16)を得る。

$$x(V-x)u^2 - 2xdu - d^2 + k((V-x)u-d)^2 = 0 \quad (15)$$

$$\{(V-x)(x+k(V-x))\}u^2 - 2(x+k(V-x))du - d^2(1-k) = 0 \quad (16)$$

2次方程式(16)の根を(17)に示す。

$$(16)の根 = \frac{(x+k(V-x))d \pm d\sqrt{V(x+k(V-x))}}{(V-x)(x+k(V-x))} \quad (17)$$

ここで、 $X(k)$ を(18)で再定義すると、Tを最小化する u^{**} は(19)となる。

$$X(k) = x + k(V-x) \quad (18)$$

$$u^{**} = \frac{d\left(1 + \sqrt{\frac{V}{X(k)}}\right)}{V-x} \quad (19)$$

なお(19)において、 $k=0$ とすれば、(13)に一致することが確認できる。

7. 低速回線と高速回線への適用例

(20)式で定義する伝送回線での情報ビット実効使用効

率 y を導入すると、DとTについて最適化されたパケット長 Z^* 、 Z^{**} は(21)、(22)式で与えられる。

$$y = x/V \quad (20)$$

$$Z^* = xu^* + d = \frac{d(1+\sqrt{y^{-1}})}{y^{-1}-1} + d \quad (21)$$

$$Z^{**} = xu^{**} + d = \frac{d\left(1 + \sqrt{(y+k(1-y))^{-1}}\right)}{y^{-1}-1} + d \quad (22)$$

[低速回線の例]

$V=64\text{Kbps}$ 程度の低速回線では、低い使用効率 $y = 0.4(40\%)$ を想定する必要があり、ヘッダ長 $d = 1(\text{Kbit})$ とする。又、 $k=0.5$ とすると、最適パケット長 Z^* 、 Z^{**} は以下の通りとなる。

$$Z^* = 2.73(\text{Kbit}) \quad Z^{**} = 2.46(\text{Kbit})$$

T最小化パケット長 Z^{**} はデータ発生をも考慮した遅延を最小化し、D最小化パケット長 Z^* は中継系での遅延を最小化しているため、ネットワーク全体として見ればその中間を考えれば十分と思われる。

いずれにしても、低使用効率を余儀なくされる低速回線では、パケット全体の40%前後をオーバーヘッド分が占めることになり、現実の測定結果とも合致する傾向である。

[高速回線の例]

$V=1\text{Mbps}$ 程度の高速回線では、比較的高い使用効率 $y = 0.8(80\%)$ を想定できる。ヘッダ長 $d = 1(\text{Kbit})$ とし、 $k=0.5$ とすると、 Z^* 、 Z^{**} は以下の通りである。

$$Z^* = 9.44(\text{Kbit})$$

$$Z^{**} = 9.3(\text{Kbit})$$

パケット全体に占めるオーバーヘッド分は10%前後であり、情報実効使用効率も高い。もし、ヘッダ長を最小限の長さに抑えて、例えば、 $d=5\text{バイト}=40\text{ビット}$ とできれば、対応するパケット長は約48バイト前後となり、ATMセルのセル長53バイトに近似する。1Gbps等のさらなる高速回線では、 $y=0.85\sim 0.9$ と設定できるので、ATM交換はこのような超高速トラヒック条件下で最適化された方式であると言える((8.3)節参照)。

8. 考察

(8.1)遅延時間評価式TとDの形状

パケットのバッファ内待ち時間WにアーランC(6)式を適用した結果として、(8)のT、(ならびに(9)のD)の評価式を得たが、(8)式を(23)として再掲する。

$$T = ku + \frac{xu^2 + du}{(v-x)u-d} \quad (23)$$

ここで、(23)両辺をdで割り、 $v = u/d$ と置くと(24)を得る。

$$\frac{T}{d} = kv + \frac{xv^2 + v}{(v-x)v-1} \quad (24)$$

すなわち、(24)の右辺にはヘッダ長dは出てこない。従って、(24)をvで偏微分して零と置いても、(19)と同様の以下の結果(25)を得る。

$$v^{**} = \frac{u^{**}}{d} = \frac{1 + \sqrt{\frac{v}{x(k)}}}{v-x} \quad (25)$$

さらに、使用効率yを用いると、最適パケット長 Z^{**} (22)はdで両辺を割って、(26)で表現できる。

$$\frac{z^{**}}{d} = \frac{1 + \sqrt{(y+k(1-y))^{-1}}}{y^{-1}-1} + 1 = \frac{y^{-1} + \sqrt{(y+k(1-y))^{-1}}}{y^{-1}-1} \quad (26)$$

すなわち、最適パケット長/ヘッダ長は使用効率yのみをパラメタとして表現できた。

(8.2)ポラチェック・ヒンチンM/G/1式の適用

遅延評価式TやDにM/M/1のアーランC式でなくM/G/1式を適用しても、(8.1)での諸性質は保持されるかを以下に調べる。

パケット待ち式はアーランC式(6)のかわりに、次式(27)で与えられる。

$$W = \frac{1+c^2}{2} \frac{ah}{1-a} \quad (27)$$

但し、 C^2 はサービス時間分布の変動係数で、例えば、M/D/1では $C^2=0$ 、M/M/1では $C^2=1$ となる。すると、総平均遅延時間Tは(7)のかわりに(28)となる。

$$T = ku + \frac{h}{1-a} \left(\frac{c^2-1}{2} a + 1 \right) = ku + \frac{h}{1-a} (Sa + 1) \quad (28)$$

但し、 $S = (C^2 - 1) / 2$ と置いた。

(28)に一連の式(2)~(5)を代入すると、(29)を得る。

$$T = ku + \frac{xu^2 + du}{(v-x)u-d} \left(1 + S \frac{xu+d}{vu} \right) \quad (29)$$

両辺をdで割ると(30)を得る。

$$\frac{T}{d} = kv + \frac{xv^2 + v}{(v-x)v-1} \left(1 + S \frac{xv+1}{vv} \right) \quad (30)$$

右辺にヘッダ長dが陽に入っていない評価式を得た。

(8.3)ATMセルとIPパケットの必然性

(26)において使用効率yをパラメタとしてヘッダ・ビット量の何倍のビット量をパケットが運ぶのが最適化の指標 Z^{**}/d を図2に示す。(k=0とk=0.5)。

ここで、k=0は Z^*/d であり、ネットワーク全体ではこの最適性指標は Z^{**}/d と Z^*/d の間に存在する。

ATMセルでは、セル全長=53バイト、ヘッダ長=5バイトと固定なので、指標値 $Z/d=10.6$ となる。一方、IPパケットでは、最小のヘッダ長=20バイト、最大のパケット長≒約64Kバイトなので、指標値の Z/d の最大値≒3200となる。ATMでは時分割回線交換での、スロット発生と同様にセルを周期的に発生させることにより、処理能力向上をはかっており、その点ではIPパケットより有利である。ところが、図2を見てわかるように、ATM方式の指標値 $Z/d=10.6$ に対応するのは $y=0.825$ 付近(使用効率82.5%前後)であり、その点IPパケット方式はパケット長が可変なので $y=0.5 \sim y=0.999$ の広範囲の使用効率で最適化が達成できる。

9. おわりに

パケット交換において、パケット全体に占めるヘッダの比率は高速回線になればなるほど低くなる傾向が見られる。本研究で検討したトラヒックの側面からシステムを最適化すると、同様の傾向が裏付けられた。MbpsさらにはGbps級の超高速回線ネットワークにおいては、ヘッダ比率0.1前後のATMセル、さらには0.1~0.01以下のIPパケットがトラヒックの最適性の側面から効果的であることがわかる。直感的には、超高速回線ではパケット長が大きくなっても、パケット伝送時間もパケット待ち時間も短縮できるからである。なお、本考察はアーランC式 $W = \frac{ah}{1-a}$ の持つ特性に由来しており、現実のサービス窓口業務での分析が今後の課題である。

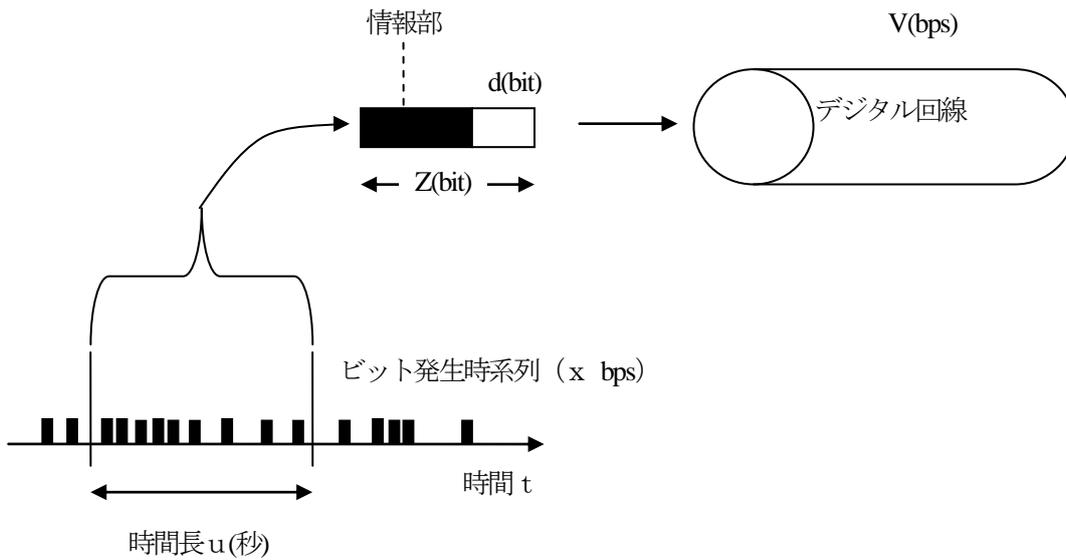


図1：ビット発生・パケット形成・パケット伝送のトラフィックモデル

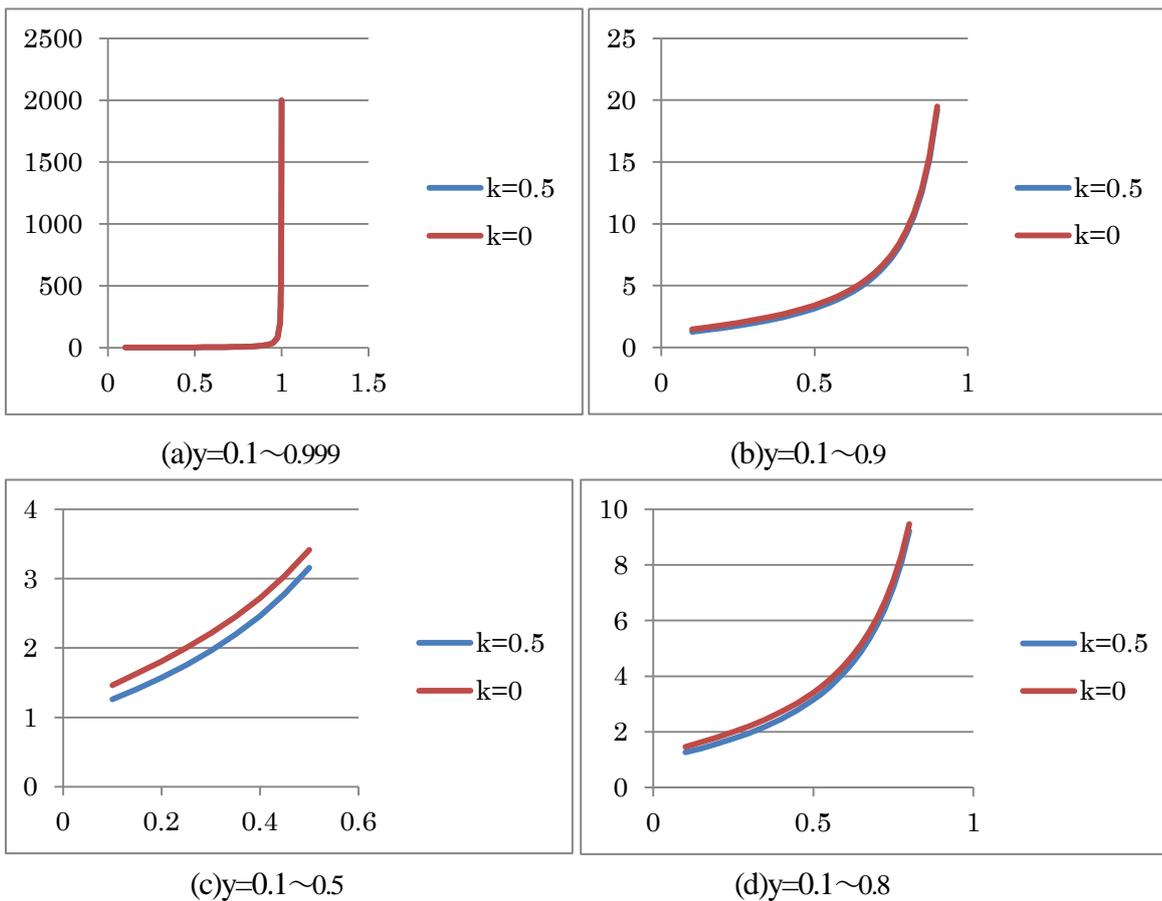


図2：情報ビット実効使用効率 y に対するヘッダ長で正規化したパケット長 (Z^*/d) の最適値
 使用効率 y を横軸、最適化した正規化パケット長の指標 Z^*/d を縦軸に示した ($k=0$ は D 最適化、 $k=0.5$ は T 最適化)。
 $k=0$ の指標 Z^*/d 値特性は $k=0.5$ の特性よりも大きく、その差は約 0.25 である。両特性は一部重なって表示されるので、
 4 つの使用効率 y の区間 (a)~(d) で表示する。