

複式簿記理論の位相幾何学的考察（その9）

——動的モデル、非線形モデル、均衡モデル——

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

篠原 健

1. はじめに

複式簿記システムの基本的な離散時間・線形システム・動特性(dynamics)を記述し、利子率を考慮したもとの均衡モデルと非線形モデルを考察する。さらに、財務状態にもとづく金融バブル現象の説明を試みる。

2. 離散時間・線形システムモデル

最も基本的な複式簿記システムを離散時間動的モデルとして記述すると、(1)式を得る。

$$x(t+1)=x(t)+Sf(t) \quad (1)$$

但し、 $x(t)$: t 時点対応ストック変数ベクトル

$f(t)$: t 期枝対応フロー変数ベクトル

S : 時不変の点一枝接続行列

なお、文献[1]の「 $p=q-f_s$ (7)」において、

$x(t+1)$ を p 、 $x(t)$ を q 、 $Sf(t)$ を $-f_s$ と対応させた。

又、複式簿記行列 $K=T-T^T$ を用いれば、(1)式は(2)式でも表現できる。

$$x(t+1)=x(t)+K(t)1 \quad (2)$$

(1)式（あるいは(2)式）は、 $t+1$ 時点のストック $x(t+1)$ は t 時点のストック $x(t)$ に t 期のフロー $f(t)$ による修正をすることにより、更新できることを表現している(図1)。

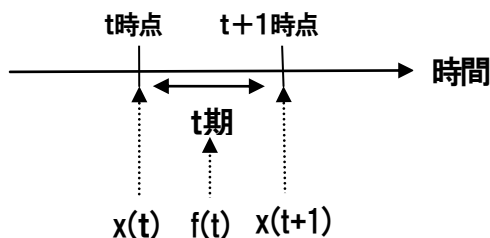


図1：ストック $x(t)$ とフロー $f(t)$ の時間関係

3. 利子率を考慮した離散時間モデル

(1)において、ストック、フロー共にスカラー値の場合を考えると(3)式となる。

$$x(t+1)=x(t)+f(t) \quad (3)$$

すなわち、 t 期のキャッシュフロー $f(t)$ を t 時点の貯蓄ストック $x(t)$ に加えると、 $t+1$ 時点の貯蓄ストック $x(t+1)$ を得る。ここで、 t 期間中での利子分を考えると、(4)式を得る。

$$x(t+1)=(1+r)x(t)+f(t) \quad (4)$$

右辺に利子分 $rx(t)$ が新たに加わった。 r は期間利子率である。

ベクトル形式でも同様に(5)式を得る。

$$x(t+1)=(I+R)x(t)+Sf(t) \quad (5)$$

但し、 R : スtock利子率行列（節点数×節点数）。

典型的な利子率行列 R は(6)式で与えられるが、一般には対角行列に限定されない。

$$R=\text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & r_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

4. 連続時間モデル

最初に、スカラー値版・離散時間モデルの連続版を考えると(7)式を得る。

$$\frac{dx(t)}{dt}=rx(t)+f(t) \quad (7)$$

例えば、 $r=r(t)$ では、(7)の微分方程式は以下の解(8)を得る（例えば[2]参照）。

$$x(t)=\int_0^t f(u) \exp\left(\int_u^t r(v)dv\right) du + x(0) \exp\left(\int_0^t r(u)du\right) \quad (8)$$

但し、 $t \geq u \geq 0$ 。

ベクトル形式では、(9)の微分方程式を得る。

$$\frac{dx(t)}{dt} = R(t)x(t) + f(t) \quad (9)$$

ここで、右辺第2項の $f(t)$ は本来は $Sf(t)$ であるが、 $Sf(t)$ を新たに $f(t)$ として、簡略表記する。(8)と同様に、(9)式は(10)の解をもつ。

$$x(t) = \int_0^t f(u) \exp\left(\int_u^t R(v) dv\right) du + x(0) \exp\left(\int_0^t R(u) du\right) \quad (10)$$

但し、 A が行列の時に、以下の表記法(11)、(12)が成立するとした。

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (11)$$

$$(\int A dx)_{ij} = \int a_{ij} dx \quad (12)$$

例えば、 $R(t)=R$ ならば、(10)は(13)となる。

$$x(t) = \int_0^t f(u) \exp(R(t-u)) du + x(0) \exp(Rt) \quad (13)$$

さらに、 $f(t)$ が離散時点CF列 $\{f_k\}$ の場合は([2]参照)、デルタ関数 $\delta(t)$ を使って、(14)、(15)を得る。

$$f(t) = \sum f_k \delta(t - t_k) \quad (14)$$

$$x(t) = \sum f_k \exp(R(t - t_k)) + x(0) \exp(Rt) \quad (15)$$

(15)において、 $x(0)=f_0$ (但し、 $t_0 = 0$) に含めれば、(16)となる。

$$x(t) = \sum f_k \exp(R(t - t_k)) \quad (16)$$

もし、 $R = \text{diag}(r_0)$ の対角行列ならば、(17)が成立するので、(11)より、 $\exp(R(t - t_k))$ は(18)となる。

$$R^k = \text{diag}(r_i^k) \quad (17)$$

$$\exp(R(t - t_k)) = \text{diag}(\exp(r_i(t - t_k))) \quad (18)$$

従って、(16)の $x(t)$ は次式(19)となる。

$$x(t) = \sum f_k \text{diag}(\exp(r_i(t - t_k))) \quad (19)$$

ベクトル $x(t)$ 、 f_k の第 i 要素を $x_i(t)$ 、 $f_{k,i}$ とすれば、(20)を得る。

$$x_i(t) = \sum f_{k,i} \exp(r_i(t - t_k)) \quad (20)$$

但し、 $t \geq u \geq 0$ あるいは $t \geq t_k \geq 0$ 。

すなわち、利子率行列 R が対角行列ならば、 t 時点でのストック i 、 $x_i(t)$ は、 t 時点までに発生したストック i でのキャッシュフロー列 $\{f_{k,i}\}$ に対して、 t 時点での時間価値変換値の総和となる。

5. 均衡モデル

2, 3, 4章で説明した複式簿記システムの動特性の均衡

モデルについて考察する。均衡モデルなので時間微分項 $=0$ とすることにより、2章では(1)より(21)、3章では(5)より(22)、4章では(9)より(23)の均衡モデルを得る。

$$Sf=0 \quad (21)$$

$$Rx+Sf=0 \quad (22)$$

$$Rx+f=0 \quad (23)$$

複式簿記システムの均衡モデルでは、均衡状態での均衡ストック x と均衡フロー f の関係を解明するため、利子率を考慮しない(21)は不適切であり、(22)あるいは(23)が複式簿記理論の均衡モデルといえる。以下に3つの例題を通して、均衡モデルを説明する。

[例5. 1 : 単一勘定ノード]

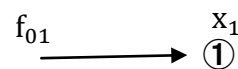


図2：単一勘定ノードの例

図2に示す単一の勘定ノード①を考え、そのストックを x_1 、流入フローを f_{01} とする。ストック x_1 に対する利子率を r_1 とすると、均衡条件(24)を得る。

$$r_1 x_1 + f_{01} = 0 \quad (24)$$

例えば、キャッシュ100万円のストックが存在し($x_1 = 100$)、年利子率5%($r_1 = 0.05$)とするならば、ストックが均衡する(時間的に不変となる)ためには、次式(25)の成立が要求される。

$$f_{01} = -r_1 x_1 = -5(\text{万円}) \quad (25)$$

すなわち、勘定ノード①から年当たりキャッシュ5万円が流出していれば、勘定ノード内のストック x_1 は、増加利子分($r_1 x_1 = 5$ 万)と流出キャッシュ分(−5万円)でプラスマイナス零の均衡が保たれる。 [例5. 1 終わり]

[例5. 2 : 2つの勘定ノード (無相関利子率)]

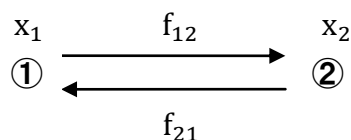


図3：2つの勘定ノード

図3に示す2つの勘定ノード系を考える。ノード①、②のストックを x_1, x_2 、2ノード間のフローを f_{12}, f_{21} とする。ストック x_1, x_2 に対する利子率を r_1, r_2 とすると、均衡条件(26)を得る。

$$Rx+Sf=0 \quad (26)$$

但し、 R, x, S, f は以下の通り。

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$f = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{21} \end{pmatrix} \quad (30)$$

ここで、 S は図3の有向グラフの点-枝接続行列であるが、2章でも述べたように、文献[1]の(7)式の $-f_s$ と本論文(1)式の $Sf(t)$ を対応させている都合上、接続行列の定義が通常の逆となっている。

(26)式を要素毎に示すと以下の通りである。

$$r_1 x_1 - f_{12} + f_{21} = 0 \quad (31)$$

$$r_2 x_2 + f_{12} - f_{21} = 0 \quad (32)$$

あるいは、

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 = 0 \quad (33)$$

例えば、ストック x_1 は現金キャッシュで、ストック x_2 は不動産資産としよう。現金キャッシュの年利子率は10%($r_1 = 0.1$)で、不動産時価は、不動産バブル崩壊などの理由により年当り50%下落($r_1 = -0.5$)である。

すると、(33)より、

$$0.1x_1 = 0.5x_2 \quad \text{あるいは} \quad x_1 = 5x_2 \quad (34)$$

の関係が要求される。又、差分フロー

$$\Delta f_{12} = f_{12} - f_{21} \quad (35)$$

と定義すれば、(36)を得る。

$$\Delta f_{12} = r_1 x_1 = -r_2 x_2 \quad (36)$$

(33)式あるいは(34)式は、均衡点において満たされるべきストック x_1, x_2 の関係を示している。

不動産時価 $x_2 = 1000$ 万円とすれば、現金キャッシュ $x_1 = 5000$ 万円となり、不動産へ現金キャッシュが、年間差分フロー $\Delta f_{12} = 500$ 万円として投資されることにより均衡が保たれる。

[例5. 2 終わり]

[例5. 3 : 2つの勘定ノード (有相関利子率)]

勘定ノードのネットワークは例5.2と同じく図2である。

但し、利子率行列が一般的に(37)で与えられる。

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \quad (37)$$

例5.2では、 $r_{11} = r_1, r_{22} = r_2, r_{12} = r_{21} = 0$ であるが、

本例では、 $r_{12} \neq 0, r_{21} \neq 0$ を仮定した。すなわち、ストック1の利子相当分として、ストック2の量 x_2 が $r_{12}x_2$ として寄与する。従って、均衡条件(38)を得る。

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

[例5. 3 終り]

6. 非線形モデル

前2~5章で扱ったモデルはすべて線形モデルである。例えば、前5章の例5.3では異種ストック間の利子相当分の相関性を数量化したが、本来の非線形システムの一次近似モデルとして位置づけられる。複式簿記システムを非線形・複雑系として扱い、様々な非線形現象、バブル現象を解明するためには、非線形モデルの確立が必要である。以下に2つの例題を通して、非線形モデルの可能性について説明する。

[例6. 1 : 多次元版時間価値変換写像]

利子率を考慮した、スカラー値版離散時間モデル(4)に対して金銭の時間価値変換(TVM)写像を導入すると、その非線形モデル(39)を得る (TVM写像については、[3]参照)。

$$x(t+1) = m(x(t)) + f(t) \quad (39)$$

ここで、 $m(x)$ がTVM写像であり、(4)では(40)が成立する。

$$m(x) = (1+r)x \quad (40)$$

すなわち、線形モデルでは、 $t+1$ 期のストック値 $x(t+1)$ は、 t 期のストック値 $x(t)$ の $1+r$ 倍に変換されるが、これを一般化して、 $m(x)$ という x の関数とした。なお、(40)式のTVM写像は時不変であるが、時変TVM写像も $m(x; t)$ で考慮できる。利子率 r の立場から、直接、非線形性を考慮する場合は、(39)のかわりに、(41)を考えればよい。

$$x(t+1) = x(t) + r(x(t)) + f(t) \quad (41)$$

ここで、 $r(x)$ は利子率 r をストック値 x に依存するように一般化した利子率関数であり、TVM写像 $m(x)$ とは(42)の関係にある。

$$r(x) = m(x) - x \quad (42)$$

同様にして、ベクトル版の離散時間モデルの非線形モデル(43)あるいは(44)を得る。

$$x(t+1) = M(x(t)) + Sf(t) \quad (43)$$

$$x(t+1) = x(t) + R(x(t)) + Sf(t) \quad (44)$$

ここで、 $M(x)$ は多次元版TVM写像、 $R(x)$ は多次元版利子率関数であり、(45)の関係にある。

$$R(x) = M(x) - x \quad (45)$$

次元数=2の場合には、 $M(x), R(x)$ は各々(46),(47)となる。

$$M(x) = \begin{pmatrix} M_1(x) \\ M_2(x) \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$R(x) = \begin{pmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \end{pmatrix} \quad (47)$$

$M_1(x), R_1(x)$ が x_1 のみ、 $M_2(x), R_2(x)$ が x_2 のみの関数となる無相関の場合で、ストック x_1 は現金キャッシュ、ストック x_2 は不動産資産を想定しよう。

正の現金キャッシュに対しては利子率 r_1 、負の現金キャッシュ(借金)に対しては利子率 r_2 では、 $M_1(x), R_1(x)$ は各々(48),(49)となる。

$$M_1(x) = \begin{cases} (1+r_1)x_1 & x_1 \geq 0 \\ (1+r_2)x_1 & x_1 < 0 \end{cases} \quad (48)$$

$$R_1(x) = \begin{cases} r_1 x_1 & x_1 \geq 0 \\ r_2 x_1 & x_1 < 0 \end{cases} \quad (49)$$

正の不動産資産に対しては価値増加率 r_3 、負の資産に対しては除去処分を考えると、 $M_2(x), R_2(x)$ は各々(50),(51)となる。

$$M_2(x) = \begin{cases} (1+r_3)x_2 & x_2 \geq 0 \\ 0 & x_2 < 0 \end{cases} \quad (50)$$

$$R_2(x) = \begin{cases} r_3 x_2 & x_2 \geq 0 \\ -x_2 & x_2 < 0 \end{cases} \quad (51)$$

[例6. 1 終り]

[例6. 2 : フィードバックシステム]

図4に示す2つの勘定ノード①、②からなるフィードバック系を考える。ストック x_1 にはストック x_2 からフィードバック分 rx_2 とフロー f が加わり、ストック x_2 にはストック x_1 の関数 Gx_1 が加わる。

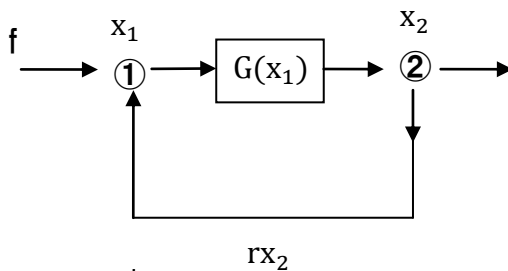


図4 : フィードバックシステム

離散時間システムを(52)、均衡モデル式を(53)に示す。

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= rx_2(t) + f \\ x_2(t+1) &= G(x_1(t)) \end{aligned} \quad (52)$$

$$x_1 = rx_2 + f$$

$$x_2 = G(x_1) \quad (53)$$

(53)式で x_2 を消去し、 x_1 のみの式(54)を得る。

$$G(x_1) = \frac{x_1 - f}{r} \quad (54)$$

(54)式は単一変数 x_1 の非線形方程式であり、複数個の解を持つ場合があり、文献[4]で説明した金融バブル等の現象を説明することができる。 [例6. 2 終り]

7. おわりに

(多次元の) 期末ストックは、期首ストックに期間中の出たり入ったりの正味フローならびに期首ストックの期間中利子相当分を加味して得られる、…を(5)ないしは(9)式で定式化した。これは、6章の非線形モデルの一次近似でもある。これにもとづき、ストックの時間変化分 $=0$ とした「多次元ストックの時間価値変化分を正味キャッシュフローで補償する」均衡モデルを考案した。ストックの時間変化分 $=0$ とした均衡モデルなので、多次元ストック・資産凍結状態を意味する。動的に時間変化する複式簿記・会計システムにおいて、何を均衡状態あるいは定常状態と考えるべきか？ストックの時間変化分 $=$ 一定値などとした均衡モデルは今後の課題である。

参考文献

- [1] 篠原正明、篠原健：複式簿記理論の位相幾何学的考察(その1)―カットセット解析―、平成20年度日本大学生産工学部第41回学術講演会・数理情報部会講演論文集(2008.12).
- [2] 篠原正明：確定的な連続時間キャッシュフローの理論、2-C-11, pp.158-159, 1994年度日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会(1994.9).
- [3] 篠原正明：時間価値変換写像による設備投資計画・評価のモデル、pp159-179, 統計数理研究所共同研究リポート61(1994.10).
- [4] 篠原正明：過大投資にともなうキャッシュフローのヒステリシス現象、1994年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会、1-A-1, p5-p6(1994.5)