ISSN 2186-5647

－日本大学生産工学部第44回学術講演会講演概要（2011-12-3）－

7-38

不完全情報一対比較行列に対する未知ウェイト代入法と Harker 法・対数最小二乗法との関係

計量計画研究所　○茂木　渉
日大生産工　篠原　正明

1.　はじめに

AHP 一対比較行列に対するウェイト推定法として，完全情報については固有ベクトル法・対数最小二乗法（幾何平均法），不完全情報については Harker 法・二段階法・対数最小二乗法などが代表的であり，また，完全・不完全どちらにも我々が提案している行毎 p 次一般化平均に基づく一般化平均ウェイト推定法が存在する．本稿では不完全情報一対比較行列に対する対数最小二乗法の理論基盤を新しい解釈の下で広げるとともに，さらに他のウェイト推定法との関係性について明確にする．

2.　不完全情報一対比較行列に対する既存のウェイト推定法

不完全情報一対比較行列に対するウェイト推定法の代表例には，Harker 法・二段階法・対数最小二乗法などがあるが，ここでは，Harker 法と対数最小二乗法，及び我々が提案している一般化平均ウェイト推定法について簡単に説明する．なお，本稿では，一対比較行列を $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ と定義し，集合 $\mathbb{E}$ を一対比較デザイングラフにおける有向枝集合とする．但し，自己ループ (i,i) は $\mathbb{E}$ には含まれない．

2.1.　Harker 法

不完全情報一対比較行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ において，項目 i のウェイトを $w_i\,(i = 1, \ldots, n)$ と仮定したとき，欠落要素 $(i,j) \notin \mathbb{E}$ をウェイトの比 w_i/w_j で置き換えて作成した完全情報一対比較行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\widetilde{a}_{ij})$ に対して固有ベクトル法を適用する方法が Harker 法である．一般に，行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\widetilde{a}_{ij})$ は以下のように定めれば良いこととなる．

$$\widetilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1 + M_i & i = j \\ 0 & i \neq j \cap (i,j) \notin \mathbb{E} \\ a_{ij} & (i,j) \in \mathbb{E} \end{cases}$$

但し，M_i は第 i 行の欠落要素数である．

そして，行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ に関する固有値問題

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w} \tag{1}$$

を解き，右主固有ベクトルを求めれば良い．

2.2.　対数最小二乗法（LLS）

一対比較値 a_{ij} を連続な実数とし，真のウェイトの比 w_i/w_j にそれぞれ独立で常に正の確率変数とする乗法型誤差 ε_{ij} が加わったと仮定し，

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (i,j = 1, \ldots, n,\ i < j) \tag{2}$$

という構造を持つとする．ここで，誤差項 ε_{ij} が平均 1，分散 σ^2 の対数正規分布に従うと仮定すれば，対数最小二乗法が最尤推定となる．ウェイトの比率を一定とした制約条件下で非欠落要素のみに注目し，(2) 式の両辺の対数をとり誤差項の二乗の総和を最小化する問題は以下で与えられる．

$$\min \quad \sum_{i<j \cap (i,j) \in \mathbb{E}} \Bigl\{ \ln a_{ij} - (\ln w_i - \ln w_j) \Bigr\}^2 \tag{3}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} \ln w_i = 0 \tag{4}$$

これをラグランジュ未定乗数法により解き，ウェイトを求める．もし，$\boldsymbol{A}$ が完全情報一対比較行列であるならば，この問題の最適解は以下のような行毎の幾何平均に帰着される．

$$w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}} \tag{5}$$

2.3.　一般化平均ウェイト推定法（未知ウェイト代入法）

完全情報一対比較行列に対するウェイト推定法として，幾何平均以外にも行毎の算術平均や調和平均，及びそれらを内包する一般化平均により推定する方法が存在する．完全情報一対比較行列 $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ の第 i 行 $\boldsymbol{a}_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\}$ に，p 次一般化平均を適用して項目 i のウェイト w_i を推定する方法

Relationship Between Unknown Weight Substitution Method and Logarithmic Least Squares Method for Incomplete Information Pairwise Comparison Matrix

Wataru MOGI† and Masaaki SHINOHARA

を，p 次一般化平均ウェイト推定法と呼ぶ．

$$w_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

不完全情報一対比較行列に対しては，欠落要素が存在するために，この方法を直接適用することができないが，Harker 法と同様に欠落している (i,j) 要素を w_i/w_j で置換して適用すると，(6) 式を (7) 式のように拡張できる．

$$w_i = \left\{ \frac{1}{n} \left(a_{ii}^p + \sum_{j \in \mathbb{E}(i)} a_{ij}^p + \sum_{j \in \bar{\mathbb{E}}(i)} \left(\frac{w_i}{w_j} \right)^p \right) \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

但し，集合 $\mathbb{E}(i)$ は節点 i を始端とする隣接節点集合，集合 $\bar{\mathbb{E}}(i)$ は節点 i を始端とする補グラフの隣接節点集合であり，また，いずれの集合にも自己ループ (i,i) は含まれない．

これは両辺に未知変数を含む非線形連立方程式であり，この式を解くことで項目 i のウェイトを求めることができる．このように，欠落要素を w_i/w_j で置換してウェイト推定を行う方法を我々は総称して「未知ウェイト代入法」と呼称している．

3. 対数最小二乗法の解釈の拡張

不完全情報一対比較行列に対する対数最小二乗法は，いくつかの文献によると「行列 $\boldsymbol{A}$ の欠落要素を無視し，非欠落要素のみについて考える」と紹介されていることが多いが，これは見方を変えれば，欠落要素を誤差なし（$\varepsilon_{ij}=1$）の w_i/w_j で置き換えて生成される完全情報一対比較行列に対して対数最小二乗法を適用することと同意である（同様の考え方は刀根 [4] でもされているが，一般の書籍等では解説されていないようである）．

ここで，欠落要素を $\bar{a}_{ij}$ とし，これを未知のウェイトの比 w_i/w_j で置き換えるという操作を制約条件として記述すれば，以下の非線形計画問題として定式化できる．

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i<j \cap (i,j) \in \mathbb{E}} \Big\{ \ln a_{ij} - (\ln w_i - \ln w_j) \Big\}^2 \\ & + \sum_{i<j \cap (i,j) \notin \mathbb{E}} \Big\{ \ln \bar{a}_{ij} - (\ln w_i - \ln w_j) \Big\}^2 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} \ln w_i = 0 \tag{9}$$

$$\ln \bar{a}_{ij} = \ln w_i - \ln w_j \ \ \big(i<j \cap (i,j) \notin \mathbb{E} \big) \tag{10}$$

(10) 式を (8) 式に代入すれば，(3) 式に帰着できるため，これは元の問題と等価である．

さて，この問題を整理せずに直接解くことを考えよう．対数関数を $\alpha_{ij} := \ln a_{ij}$, $\bar{\alpha}_{ij} := \ln \bar{a}_{ij}$, $u_i := \ln w_i$ と変数変換し，ラグランジュ未定乗数法を適用する．まず，ラグランジュ関数を次式で定義する．

$$\begin{aligned} L = & \sum_{i<j \cap (i,j) \in \mathbb{E}} \Big\{ \alpha_{ij} - (u_i - u_j) \Big\}^2 \\ & + \sum_{i<j \cap (i,j) \notin \mathbb{E}} \Big\{ \bar{\alpha}_{ij} - (u_i - u_j) \Big\}^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i \\ & - \sum_{i<j \cap (i,j) \notin \mathbb{E}} \mu_{ij} \Big\{ \bar{\alpha}_{ij} - (u_i - u_j) \Big\} \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，α_{ij} は定数，u_i, u_j 及び $\bar{\alpha}_{ij}$ は未知変数，λ, μ_{ij} はラグランジュ乗数である．関数 L の最適性の 1 次の必要条件は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_k} = & -2 \sum_{k<j \cap (k,j) \in \mathbb{E}} \Big\{ \alpha_{kj} - (u_k - u_j) \Big\} \\ & + 2 \sum_{i<k \cap (i,k) \in \mathbb{E}} \Big\{ \alpha_{ik} - (u_i - u_k) \Big\} \\ & - 2 \sum_{k<j \cap (k,j) \notin \mathbb{E}} \Big\{ \bar{\alpha}_{kj} - (u_k - u_j) \Big\} \\ & + 2 \sum_{i<k \cap (i,k) \notin \mathbb{E}} \Big\{ \bar{\alpha}_{ik} - (u_i - u_k) \Big\} - \lambda \\ & + \sum_{k<j \cap (k,j) \notin \mathbb{E}} \mu_{kj} - \sum_{i<k \cap (i,k) \notin \mathbb{E}} \mu_{ik} \\ = & -2 \left(\alpha_{kk} + \sum_{j \in \mathbb{E}(k)} \alpha_{kj} + \sum_{j \in \bar{\mathbb{E}}(k)} \bar{\alpha}_{kj} \right) + 2n u_k \\ & - \lambda + \sum_{k<j \cap (k,j) \notin \mathbb{E}} \mu_{kj} - \sum_{i<k \cap (i,k) \notin \mathbb{E}} \mu_{ik} = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\alpha}_{ij}} = 2 \Big\{ \bar{\alpha}_{ij} - (u_i - u_j) \Big\} - \mu_{ij} = 0 \quad \big(i<j \cap (i,j) \notin \mathbb{E} \big) \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} u_i = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_{ij}} = \bar{\alpha}_{ij} - (u_i - u_j) = 0 \ \ \big(i<j \cap (i,j) \notin \mathbb{E} \big) \tag{15}$$

(12) 式の展開には，逆比性と同項目間の評価値 $=1$ として

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}, \quad \bar{\alpha}_{ij} = -\bar{\alpha}_{ji}, \quad \alpha_{ii} = 0 \tag{16}$$

を利用している．

(13),(15) 式より直ちに

$$\mu_{ij} = 0 \quad \big(i<j \cap (i,j) \notin \mathbb{E} \big) \tag{17}$$

が得られるので，後は完全情報の場合と同様の操作を行う．再び (16) 式を考慮し，(12) 式を k について総和をすることで

$$\lambda = 0 \tag{18}$$

を得る．(17),(18) 式を (12) 式に代入することにより，

$$u_k = \frac{1}{n}\left(\alpha_{kk} + \sum_{j\in\mathbb{E}(k)} \alpha_{kj} + \sum_{j\in\bar{\mathbb{E}}(k)} \bar{\alpha}_{kj}\right) \tag{19}$$

となるが，(15) 式から，

$$u_k = \frac{1}{n}\left(\alpha_{kk}+ \sum_{j\in\mathbb{E}(k)} \alpha_{kj}+ \sum_{j\in\bar{\mathbb{E}}(k)} \left(u_k - u_j\right)\right) \tag{20}$$

なので，変数を元に戻せば，

$$w_k = \sqrt[n]{a_{kk}\cdot \prod_{j\in\mathbb{E}(k)} a_{kj}\cdot \prod_{j\in\bar{\mathbb{E}}(k)} \frac{w_k}{w_j}} \tag{21}$$

が得られる．

以上のように，欠落要素を $\bar{a}_{ij} = w_i/w_j$ で置き換えるという解法の方針では，最終的には両辺に未知変数を含む非線形連立方程式になってしまったが，完全情報と同じように行毎の幾何平均の形式にすることができた．従って，不完全情報一対比較行列に対し，対数最小二乗法を適用して得られるウェイトは，欠落要素を w_i/w_j で置換した幾何平均 (21) 式の非線形連立方程式を解くことによっても求めることができる．

また，(21) 式は幾何平均式であり，これを p 次一般化平均で置き換えれば，我々の提案している (7) 式の一般化平均ウェイト推定法に一致する．これより，完全情報における固有ベクトル法・幾何平均法（対数最小二乗法）・一般化平均法という一連の関係は，不完全情報における Harker 法・対数最小二乗法・一般化平均法の関係に対応していることが明らかになった．

4.　3×3 一対比較行列への適用

項目数 $n = 3$ で一対比較デザイングラフが図 1 で与えられる不完全情報一対比較行列に対し，未知ウェイト代入法（Harker 法，一般化平均法）によりウェイト推定を行う．このケースでは $(1,3)$ 要素を欠落させているが，トポロジーを考えれば，どの要素を欠落させても変わらないので，一般性を損なうことはないことを注意しておく．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & (\ ) \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ (\ ) & a_{32} & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

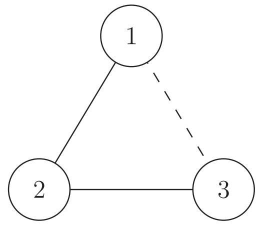

図 1. 欠落測定値（破線）を持つ一対比較デザイングラフ

4.1.　Harker 法による推定

行列 $\boldsymbol{A}$ の欠落要素を w_i/w_j で置換すると，以下の固有値問題を得る．

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w} \tag{23}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 2 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

これより得られる固有方程式を解くと，

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

$$\lambda = 0,\ 2,\ 3 \tag{25}$$

となり，従って，$\lambda_{\max} = 3$ に対応する固有ベクトルは同次方程式

$$\begin{cases} -w_1 + a_{12}w_2 = 0 \\ a_{21}w_1 - 2w_2 + a_{23}w_3 = 0 \\ a_{32}w_2 - w_3 = 0 \end{cases} \tag{26}$$

を解き，$w_2 = 1$ で正規化すれば $\boldsymbol{w} = (a_{12}, 1, a_{32})^{\mathsf{T}}$ となる（固有方程式の式展開には逆比性を利用）．

4.2.　一般化平均法による推定

行列 $\boldsymbol{A}$ の欠落要素を w_i/w_j で置換して一般化平均法を適用すると，以下の非線形連立方程式を得る．

$$\begin{cases} w_1 = \left\{\dfrac{1}{n}\left(1^p + a_{12}^p + \left(\dfrac{w_1}{w_3}\right)^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \\ w_2 = \left\{\dfrac{1}{n}\left(a_{21}^p + 1^p + a_{23}^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \\ w_3 = \left\{\dfrac{1}{n}\left(\left(\dfrac{w_3}{w_1}\right)^p + a_{32}^p + 1^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \end{cases} \tag{27}$$

各式の両辺を p 乗し，n 倍すれば，次のように変形できる．

$$nw_1^p = 1^p + a_{12}^p + \left(\frac{w_1}{w_3}\right)^p \tag{29a}$$

$$nw_2^p = a_{21}^p + 1^p + a_{23}^p \tag{29b}$$

$$nw_3^p = \left(\frac{w_3}{w_1}\right)^p + a_{32}^p + 1^p \tag{29c}$$

(29a) 式を w_1^p について整理する．

$$nw_1^p w_3^p - w_1^p = w_3^p\left(1^p + a_{12}^p\right)$$

$$w_1^p = \frac{w_3^p\left(1^p + a_{12}^p\right)}{nw_3^p - 1} \tag{30}$$

(30) 式を (29c) 式に代入して整理すると (31) 式を得る．

$$nw_3^p = \frac{nw_3^p - 1}{1^p + a_{12}^p} + a_{32}^p + 1^p$$

$$nw_3^p\left(1^p + a_{12}^p\right) = nw_3^p - 1 + \left(a_{32}^p + 1^p\right)\left(1^p + a_{12}^p\right)$$

$$nw_3^p = \frac{a_{32}^p + a_{32}^p a_{12}^p + a_{12}^p}{a_{12}^p}$$

$$w_3 = \left\{\frac{1}{n}\left(\frac{a_{32}^p}{a_{12}^p} + a_{32}^p + 1^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{31}$$

さらに (31) 式を (30) 式に戻せば，(32) 式を得る．

$$w_1^p = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{a_{32}^p}{a_{12}^p} + a_{32}^p + 1^p\right)\left(1^p + a_{12}^p\right)}{\frac{a_{32}^p}{a_{12}^p} + a_{32}^p + 1^p - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{a_{32}^p}{a_{12}^p} + a_{32}^p + a_{32}^p + a_{12}^p a_{32}^p + 1^p + a_{12}^p\right)}{\frac{a_{32}^p}{a_{12}^p} + a_{32}^p}$$

$$w_1 = \left\{\frac{1}{n}\left(1^p + a_{12}^p + \frac{a_{12}^p}{a_{32}^p}\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{32}$$

w_1, w_2, w_3 が得られたので，逆比性を利用して $w_2 = 1$ で正規化する．

$$w_1 = \frac{\left\{\frac{1}{n}\left(1^p + a_{12}^p + \frac{a_{12}^p}{a_{32}^p}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}}{\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{12}^p} + 1^p + \frac{1}{a_{32}^p}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}} = a_{12} \tag{33}$$

$$w_3 = \frac{\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{a_{32}^p}{a_{12}^p} + a_{32}^p + 1^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}}}{\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{12}^p} + 1^p + \frac{1}{a_{32}^p}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}} = a_{32} \tag{34}$$

従って，すべての一般化平均パラメータ p に対して Harker 法と同一のウェイトが得られた（但し，(33),(34) 式を導出せずとも，(27) 式と (31),(32) 式の対応関係からも明らかである）．

5. おわりに

本研究では以下の成果を得ることができた．

- 不完全情報一対比較行列に対する対数最小二乗法が，欠落要素を w_i/w_j で置換して擬似的に完全情報一対比較行列を生成し，対数最小二乗法を適用する方法であることを再確認した．
- 欠落要素を整理せずに対数最小二乗問題を解くことで，推定すべきウェイトが未知変数を含む非線形連立方程式になってしまうが，幾何平均の形に帰着されることを示した．また，我々の提案している一般化平均ウェイト推定法が，Harker 法や対数最小二乗法の自然な拡張であることを示した．
- 3×3 一対比較行列ならば（非欠落要素の値に関わらず）欠落要素を w_i/w_j で置換することで完全整合一対比較行列を作りだすことができるため，すべての p の値により同一のウェイトが得られる．このことは，2×2 完全情報一対比較行列や完全整合性を持つ完全情報一対比較行列に対して，p 次一般化平均ウェイト推定法を適用したときに，同一のウェイトが得られることに対応している．逆に，$n \times n$ 不完全情報一対比較行列においては，w_i/w_j の置換により完全整合一対比較行列を生成できれば，同一ウェイトを得られると考えられる．

さらに言えば，対数最小二乗法の本来の解法では最適解が線形連立方程式に帰着されることで解析的に解けるため，幾何平均形式の非線形連立方程式も如何なる欠落要素パターンでも解析的に解けることが予想される．

本研究結果と対数最小二乗法におけるトポロジー公式 [1, 2, 3] との関連性などを解明することについては，今後の課題としたい．

参考文献

[1] 篠原正明：一対比較デザイングラフにおける評価フローと価値ポテンシャル，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2004 年春季研究発表会アブストラクト集，1-B-3，pp.36-37(2004.3).

[2] Masaaki Shinohara, Keikichi Osawa, Ken Shinohara：Flow and Potential in Logarithmic Least Squares Estimation of AHP，The 8th International Symposium on The Analytic Hierarchy Process (ISAHP'05) (2005.7)

[3] 篠原正明，篠原健：AHP 不完全一対比較情報の対数最小二乗解のトポロジー公式，日本大学生産工学部第 40 回学術講演会 数理情報部会講演概要，pp.67-71(2007.12).

[4] 刀根薫：A Logarithmic Least Squares Method for Incomplete Pairwise Comparisons in AHP，日本オペレーションズ・リサーチ学会 1994 年春季研究発表会アブストラクト集，1-F-3，pp.123-124(1994.5).