

2次項を考慮したAHPウェイトベクトルの非線形平均化プロセス

日大生産工

○篠原 正明

1. はじめに

AHP比較行列 $\mathbf{A}$ にもとづき各項目の固有ウェイトベクトル $\mathbf{x}$ の形成過程を動的な平均化プロセス (DAP : Dynamic Averaging Process) として[1]で定式化した。非線形DAPの初歩的モデルとして2次項を考慮したQDAP (Quadratic DAP) を考察する。

2. 2次項を考慮したDAP

1次項のみの線形DAPでの動的プロセスは(1)で定式化できる[1]。

$$\mathbf{x}(t+1) = \frac{1}{n} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \quad (1)$$

(1)の第 k 要素は(2)となる。但し、行ベクトル $\mathbf{A}_k$ は行列 $\mathbf{A}$ の第 k 行である。

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= \frac{1}{n} \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \quad (3)$$

又、 $\mathbf{x}$ は列ベクトルである。

(2)において、 x_i と x_j の交叉項が x_k に影響を与えるとすると、(4)を得る。

$$x_k(t+1) = \frac{1}{n} \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{B}_k \mathbf{x}(t) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{B}_k$ は $n \times n$ 行列で、 (i, j) 要素は2次項 $x_i x_j$ の x_k への影響度を表わす。(4)は(5)でも表現できる。

$$x_k(t+1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i(t) x_j(t) \mathbf{B}_k(i, j) \quad (5)$$

(4)を行列ベクトル表現すれば(6)となる。

$$\mathbf{x}(t+1) = \frac{1}{n} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{B} \mathbf{x}(t) \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{B}$ は第 k 要素が $n \times n$ 行列 $\mathbf{B}_k$ となるような $n \times n \times n$ 3次元配列である。

3. QDAPの例

4項目を比較して、各ウェイトを推定するDAPの例を以下に示す。項目1, 2, 3, 4のウェイトを x_1, x_2, x_3, x_4 とし、以下の非線形連立差分方程式(7)~(10)を考えよう。

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \frac{1}{4} (a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + a_{13} x_3(t) \\ &\quad + a_{14} x_4(t)) - c x_1(t) x_2(t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} x_2(t+1) &= \frac{1}{4} (a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + a_{23} x_3(t) \\ &\quad + a_{24} x_4(t)) + c x_1(t) x_2(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} x_3(t+1) &= \frac{1}{4} (a_{31} x_1(t) + a_{32} x_2(t) + a_{33} x_3(t) \\ &\quad + a_{34} x_4(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x_4(t+1) &= \frac{1}{4} (a_{41} x_1(t) + a_{42} x_2(t) + a_{43} x_3(t) \\ &\quad + a_{44} x_4(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

(9),(10)は線形の通常のDAPであるが、(7)と(8)に交差項 $-c x_1 x_2$ と $+c x_1 x_2$ が含まれ、非線形DAPとなる。

なお、(5)式の係数 $\mathbf{B}_k(i, j)$ を用いれば、 $\mathbf{B}_k$ が対称行列とすれば、(11),(12)となる。

$$\mathbf{B}_1(1,2) = \mathbf{B}_1(2,1) = -c/2 \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_2(1,2) = \mathbf{B}_2(2,1) = c/2 \quad (12)$$

項目1のウェイト x_1 は、項目2のウェイト x_2 が零なら、通常のDAPに従ってウェイトが決定されるが、項目2のウェイト x_2 が正 ($x_2 > 0$) ならば、交差項寄与分「 $-c x_1 x_2$ 」だけ減少する。同様に項目2のウェイト x_2 は、項目1のウェイト x_1 が零なら通常のDAPに従

ってウェイトが決定されるが、項目1のウェイト x_1 が正($x_1 > 0$)ならば、交差項寄与分「 $+cx_1x_2$ 」だけ増加する。すなわち、項目1と項目2のウェイト x_1, x_2 に関しては、以下に示す個別の事象が時間遅れと共に発生し、結果として周期的な振動現象が予想できる。

「ウェイト x_1 減少」→「ウェイト x_2 減少」→
「ウェイト x_1 増加」→「ウェイト x_2 増加」→
「ウェイト x_1 減少」→・・・

すなわち、項目1と2に関しては、両者間の相互評価に相互を牽制するような非線形な相互作用が存在する場合と考えられる。

4. 数値計算例

項目数 $n=4$ で、整合性を持つ比較行列 A として(13)、項目1と項目2の間の相互作用係数 c を持つQDAP(7)~(10)を考えよう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$c = -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ の10通りについて、ウェイト(x_1, x_2, x_3, x_4)の $t=0 \sim 10$ での動特性(初期ウェイトベクトル=1)を図1~10に示す。又、図11には $c=0.4$ について、正規化ウェイトの動特性を示す。

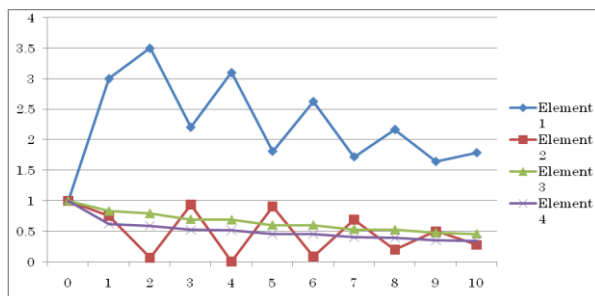


図1: QDAPのウェイト動特性($c = -0.5$)

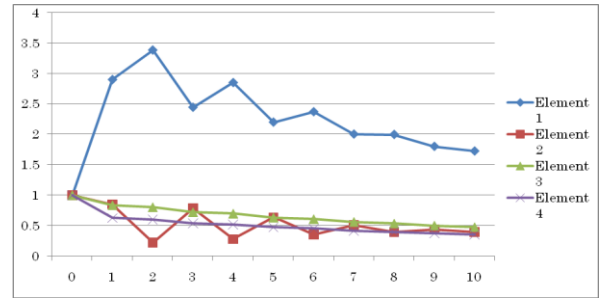


図2: QDAPのウェイト動特性($c = -0.4$)

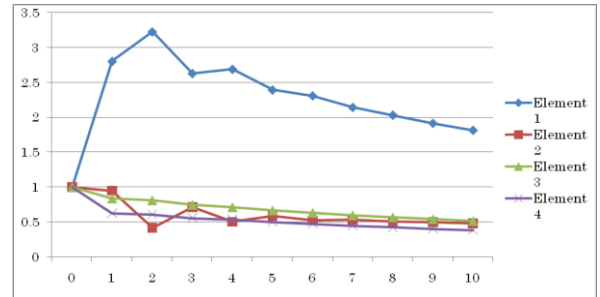


図3: QDAPのウェイト動特性($c = -0.3$)

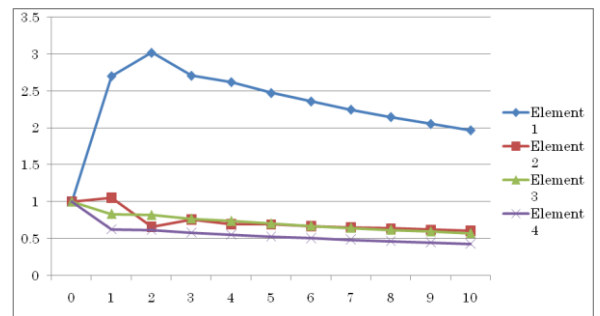


図4: QDAPのウェイト動特性($c = -0.2$)

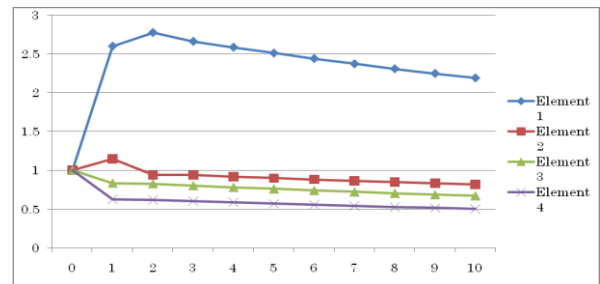


図5: QDAPのウェイト動特性($c = -0.1$)

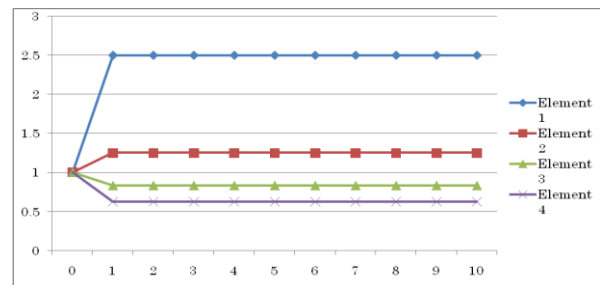


図6: QDAPのウェイト動特性($c = 0$)

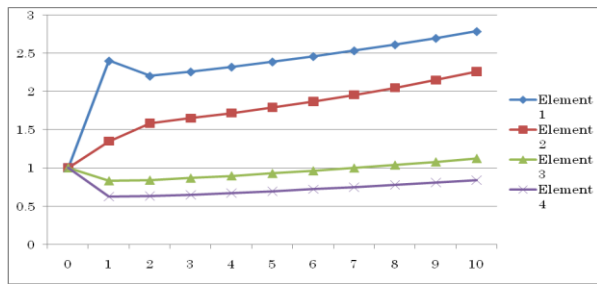


図7: QDAPのウェイト動特性($c = 0.1$)

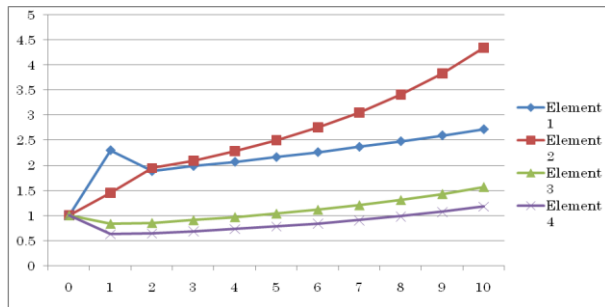


図8: QDAPのウェイト動特性($c = 0.2$)

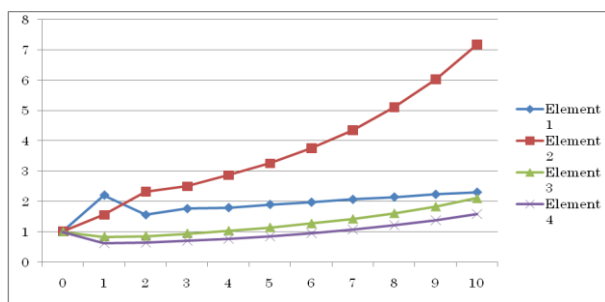


図9: QDAPのウェイト動特性($c = 0.3$)

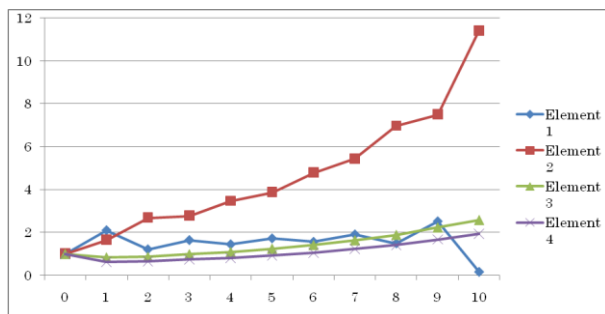


図10: QDAPのウェイト動特性($c = 0.4$)

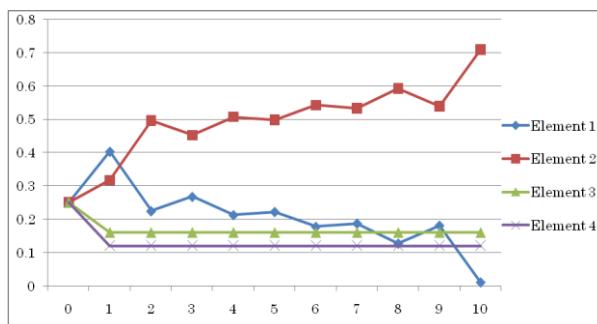


図11: QDAPの正規化ウェイト動特性($c = 0.4$)

5. おわりに

(5.1) $c = 0$ では相互作用が無いので、QDAPは通常の線形DAPの結果に一致する。

(5.2) $c = -0.5, -0.4, +0.4$ 等、相互作用係数 c の絶対値が大きい場合にウェイト1と2が補完的な振動現象を示している。なお、正規化したウェイト1, 2についてもより顕著に振動現象が観察できる。

(5.3) $|c| = 0.3, 0.2, 0.1$ 程度の比較的小さな相互作用下では、わずかな振動が観察されるか、あるいは、振動は観察されない。

(5.4) 生のウェイト3, 4 (x_3, x_4) については、ウェイト1, 2 (x_1, x_2) の動特性の影響を受けて、 $c = 0$ の場合の様に一定値を維持することはなく、(7)~(10)に従って変動する。しかし、正規化されたウェイトは図11 ($c = 0.4$) に示すように、正規化ウェイト3 ($x_3/(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$)、正規化ウェイト4 ($x_4/(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$) は $t=1$ 以降 $t=10$ まで各々0.16と0.12の一定値を維持する。この性質は図11の $c = 0.4$ に限定されず、比較行列 A が整合的な本例では任意の c について成立する。これは、(7)~(10)の右辺総和において、相互作用項が打ち消し合って、零となるからであり、この相互作用項の打ち消し効果が成立する限り、本来的に相互作用項が存在しないウェイトについては、同様の性質が成立する。

6. おわりに

非線形な動的平均化プロセス (DAP : Dynamic Averaging Process) として、2次項を考慮したQDAP (Quadratic DAP) を提案し、簡単な計算例より振動現象などを確認した。より複雑な例題についての考察は今後の課題である。

参考文献

- [1] Masaaki Shinohara : AHP Eigenvector via Dynamic Process of Pairwise Comparison and Averaging, ISAHP2011, No.ISAHP-019 Sorrento (June 15-18, 2011).

【付録1】 QDAPの2次項の意味

本文2章(6)、(4)、(5)の代わりに、右辺第2項も n で割った以下の(A-1)～(A-3)を考える。

$$\mathbf{x}(t+1) = \frac{1}{n} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \frac{1}{n} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{B} \mathbf{x}(t) \quad (\text{A-1})$$

$$x_k(t+1) = \frac{1}{n} \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t) + \frac{1}{n} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{B}_k \mathbf{x}(t) \quad (\text{A-2})$$

$$x_k(t+1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j(t) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i(t) x_j(t) \mathbf{B}_k(i, j) \quad (\text{A-3})$$

(A-1)～(A-3)を、形式的に2次項を無視した等価な (A-4)～(A-6)で以下に再表現する。

$$\mathbf{x}(t+1) = \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) \quad (\text{A-4})$$

$$x_k(t+1) = \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{A}}_k \mathbf{x}(t) \quad (\text{A-5})$$

$$x_k(t+1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{kj} x_j(t) \quad (\text{A-6})$$

ここで、(A-4)～(A-6)右辺の $\tilde{\mathbf{A}}$ 、 $\tilde{\mathbf{A}}_k$ 、 $\tilde{a}_{kj}$ は、その

時のウェイトの影響を考慮した一対比較の行列、第 k 行ベクトル、第 (k, j) 要素であり、以下の (A-7)～(A-10)で与えられる。

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{B} \quad (\text{A-7})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{A}_k + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{B}_k \quad (\text{A-8})$$

$$\tilde{a}_{kj} = a_{kj} + \sum_{i=1}^n x_i(t) \mathbf{B}_k(i, j) \quad (\text{A-9}) \quad \text{あるいは}$$

$$\tilde{a}_{kj} = a_{kj} + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{B}_k(j) \quad (\text{A-10})$$

すなわち、一対比較の第 (k, j) 要素は、項目 i のウェイト $x_i(t)$ から $x_i(t) \mathbf{B}_k(i, j)$ 分の寄与を加法的に受ける($i=1, \dots, n$)。 $\mathbf{B}_k(i, j) > 0$ なら、第 (k, j) 要素はウェイト $x_i(t)$ に比例して増加、 $\mathbf{B}_k(i, j) < 0$ なら、減少する。

【付録2】 係数 $\mathbf{B}_k(i, j)$ の決定法

係数 $\mathbf{B}_k(i, j)$ は、一対比較 (k, j) においてウェイト $x_i(t)$ の大小が与える効果を表し、(A-11)で測定できる。

$$\mathbf{B}_k(i, j) \approx \frac{\Delta a_{kj}}{\Delta x_i(t)} \quad (\text{A-11})$$

Δa_{kj} ：「項目 i を考慮した時の (k, j) 一対比較値」

－「項目 i を無視した時の (k, j) 一対比較値」

$\Delta x_i(t)$ ：「項目 i を考慮した時の正規化ウェイト収束

値 $x_i(t)$ 」－「項目 i を無視した時のウェイト $x_i(t)$ 」

具体的には、 Δa_{kj} は (A-12)で、 $\Delta x_i(t)$ は、項目 i を無視した時のウェイト $x_i(t) = 0$ 、なので、(A-13)で与えられる。

$$\Delta a_{kj} = a_{kj} - a_{kj} \quad (\text{項目} i \text{を無視}) \quad (\text{A-12})$$

$\Delta x_i(t)$ ＝線形DAP(1)の項目 i の正規化ウェイト収束値 (A-13)

ここで、 $\Delta x_i(t)$ の定義で、正規化ウェイト収束値を採用したのは、正規化しないと一対比較不整合時にはウェイトが発散してしまうからである。

【付録3】 付録2の係数 $\mathbf{B}_k(i, j)$ の性質

(1) 行列 $\mathbf{B}_k$ の非対称性

$\mathbf{B}_k(i, j)$ について(A-14)が成立し、一般に(A-11)と (A-14)は等しくない。

$$\mathbf{B}_k(j, i) \approx \frac{\Delta a_{ki}}{\Delta x_j(t)} \quad (\text{A-14})$$

従って、3章の(11)、(12)は付録2の決定法に従えば妥当でない数値例である。

(2) 逆比性

(A-12)において、 a_{kj} と a_{kj} (項目 i を無視)について逆比性を仮定すると、(A-15)あるいは(A-16)が成立する。

$$\mathbf{B}_j(i, k) \approx -\frac{1}{a_{kj}^2} \mathbf{B}_k(i, j) \quad (\text{A-15})$$

$$\frac{1}{a_{jk}} \mathbf{B}_j(i, k) + \frac{1}{a_{kj}} \mathbf{B}_k(i, j) \approx 0 \quad (\text{A-16})$$