ISSN 2186-5647

－日本大学生産工学部第44回学術講演会講演概要（2011-12-3）－

7-36

多重測定下のAHP固有ベクトル法

日大生産工　○篠原　正明

1.　はじめに

AHPの率比較行列Aにおいて、一部要素が欠落する場合は、各要素において多重測定が許容される場合の特別な場合に位置づけられる。ここで、多重測定とは対(i, j)の比較値a_{ij}を一回に限定されず複数回測定する状況をいう。対(i, j)の測定回数をn_{ij}＝｜N(i, j)｜とするならば、すべての(i, j)について$n_{ij}=1$の場合が通常の完全情報一対比較行列である。すべての(i, j)について$n_{ij}=1$あるいは$n_{ij}=0$の場合が通常の不完全情報一対比較行列である。本論文では、上記の２つの場合(完全情報一対比較行列と不完全情報一対比較行列)以外について多重測定下の固有ベクトル法による一対比較行列のウェイトベクトル推定について考察する。

2.　多重測定下の一対比較行列Aの記述

[例2.1]　3×3の比較行列の例

(1.2)要素については2回測定し、それ以外の要素は1回測定した場合の比較行列の例を(1)に示す。

$$A=\begin{pmatrix} (1) & (2,3) & (4) \\ (\frac{1}{2}) & (1) & (5) \\ (\frac{1}{4}) & (\frac{1}{3}) & (1) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(1.2)要素について、第一回目は$a_{12}(1)=2$、第2回目は$a_{12}(2)=3$である。(1.2)以外の要素については1回のみ測定し、例えば、$a_{11}=1$、$a_{13}=4$、$a_{21}=\frac{1}{2}$、等である。実際に測定をしたか否かを重要視するので、観念上成立すべきと考える逆比性は必ずしも成立していない。さらに対称要素の一方が欠落要素(対(3.1))となる次の[例2.2]も多重測定下では取り扱うことができる。

[例2.2]　3×3の比較行列の例(片側欠落要素有)

$$A=\begin{pmatrix} (1) & (2,3) & (4) \\ (\frac{1}{2}) & (1) & (5) \\ (\ ) & (\frac{1}{3}) & (1) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

以上の2つの例に基づき、多重測定下の$n\times n$一対比較行列

$A=\{a_{ij}\}$　　(3)は、以下で定義する。

$a_{ij}=\{a_{ij}(p)\mid p\in N(i, j)\}$　　(4)

$N(i, j)=\{1,2,\cdots,n_{ij}\}$:順序対$(i, j)$の測定集合

$n_{ij}=|N(i, j)|$: 順序対(i, j)の測定回数

3.　多重測定下の平均化プロセス

多重測定下の比較行列(3),(4)が与えられた下で、各項目のウェイトが従うべき平均化プロセスとして、次の2つを与える。

平均化プロセスⅠ［個別測定標本・同一重要視型(equal importance sampling)］・・・・・・個々の測定を重要視し、各測定は独立で、かつ同じ重要度を持つと考える。従って、もし、対(１，２)の測定が何らかの理由により相対的に重要で、$a_{12}(1), a_{12}(2)$と２回発生するならば、その1つ1つの測定値に基づく項目2から判断した項目1の暫定ウェイト$a_{12}(1)x_2, a_{12}(2)x_2$が他の暫定ウェイト(例えば$a_{13}x_3$)と同じ重要度で項目1のウェイト決定に寄与する。

平均化プロセスⅡ［測定標本・対重視型(group oriented sampling)］・・・・・・対(i, j)としての測定を重要視、非欠落要素$(i, j)(n_{ij}=|N(i, j)|\geq 1)$については、項目$j$から判断した項目$i$の暫定ウェイト集合$\{a_{ij}(p)x_j \mid p\in N(i, j)\}$を1つの代表値(例えば代表値関数R( )としては算術平均、幾何平均、最大値、最小値、など)に置換して処理する。

AHP Eigenvector under Multiple Measurement

Masaaki SHINOHARA

３．１　　測定標本同一重要視型平均化プロセスＩ

平均化プロセスＩでは、全ての一対比較測定を同等の重みで、$x_k(t+1)$ の更新に用いるため、(5) の更新式を得る。

$$x_k(t+1) = \frac{1}{|N_k|}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{p\in N(k,j)} a_{kj}(p)\Big)x_j(t) \qquad (5)$$

$$|N_k| = \sum_{j=1}^{n}|N(k,j)| \qquad (6)$$

ここで $|N_k|$ は(6)で定義され、比較行列 A の第 k 行の多重測定を考慮した下での要素数(あるいは、実測定数)である。あるいは、$|N(k,j)|$ が項目 k に対する項目 j からの一対比較の測定数なので、項目 k に対して測定された、一対比較の測定総数である。(5)式の両辺に $|N_k|$ を乗じると、(7)を得る。

$$|N_k|\,x_k(t+1) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{p\in N(k,j)} a_{kj}(p)\Big)x_j(t) \qquad (7)$$

(7)の両辺に $(N-|N_k|)x_k$ を加えると、(8)を得る。但し、$x_k(t)$ と $x_k(t+1)$ は区別しない。

$$Nx_k(t+1) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{p\in N(k,j)} a_{kj}(p)\Big)x_j(t) + (N-|N_k|)x_k(t) \quad (8)$$

(8)の両辺をNで割り、行列ベクトル表示をすると、(9)を得る。

$$x_k(t+1) = \frac{1}{N}A^* x(t) \quad (9) \qquad A^* = \{a_{kj}^{\ *}\} \quad (10)$$

$$a_{kj}^{\ *} = \sum_{p\in N(k,j)} a_{kj}(p) \qquad for\ j \neq k \qquad (11)$$

$$a_{kk}^{\ *} = \sum_{p\in N(k,k)} a_{kk}(p) + N - |N_k| \qquad for\ j = k \qquad (12)$$

ここで $|N(k,k)|=1$ で、$a_{kk}=1$ なので、(12)は(13)となる。

$$a_{kk}^{\ *} = 1 + N - |N_k| \qquad (13)$$

又、(11)にて、$N(k,j)=\phi$ (空集合) なら、a_{kj}*=0である。すなわち、(11)より非対角要素 a_{kj}*については、順序対 (k,j) の多重測定値の総和を、(13)より対角要素 a_{kk}*については、$a_{kk}=1$ に $N-|N_k|$ を加えた値を持つ新たな変形行列 $A^*=\{a_{kj}^{\ *}\}$ を考える。Harker法では、$|N(k,j)|\leq 1$ なので、多重測定値の総和をとる必要はない。$N(k,j)=0$ の欠落要素では、Harker法でも提案する平均化プロセスＩでも、a_{kj}*=0である。対角要素 a_{kk}*については、Harker法でも、提案する平均化プロセスＩでも(13)で同じであるが、Harker法では「$N-|N_k|$」が A の第 k 行の欠落要素数であるが、提案する平均化プロセスＩでは $a_{kk}^{\ *}=1+N-|N_k|$ は「要素数 $N+1$」から第 k 行の多重測定を考慮した実測定数 $|N_k|$ を引いた値となる。すなわち、Harker法では常に $a_{kk}^{\ *}>0$ であるが、提案する平均化プロセスＩでは $a_{kk}^{\ *}<0$ にもなりうる(4節の計算例の(37)式参照)。例2.1の(1)の行列 A に対する変形行列 A^* は(14)、例2.2の行列 A に対する A^* は(15)となる。

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \ (14) \qquad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 5 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \ (15)$$

３．２　　測定標本・対重視型平均化プロセスⅡ

暫定ウェイト集合 $\{a_{kj}(p)x_j \mid p\in N(k,j)\}$ に対する代表値関数を(16)の R で定義する。

$$R = R(\{a_{kj}(p)x_j \mid p\in N(k,j)\}) \qquad (16)$$

すると、順序対 (k,j) での測定を1つの代表値として重視する平均化プロセスⅡでは、$x_k(t+1)$ の更新式は(17)となる。

$$x_k(t+1) = \frac{1}{|S_k|}\sum_{j=1}^{n} R(\{a_{kj}(p)x_j(t) \mid p\in N(k,j)\}) \qquad (17)$$

(17)において、R に添え字 kj を付与して代表値関数をより一般化できる。又、欠落要素順序対 $(k,j)(|N(k,j)|=0)$ については $R=0$ となる。又、S_k は比較行列 A の第 k 行での測定された順序対の列の集合で、$|S_k|$ はその総数である。従って、「$|S_k| = N -$ 第 k 行の欠落要素数」が成立する。

代表値関数 R として、算術平均を選べば、(18)の更新式を得る。

$$x_k(t+1) = \frac{1}{|S_k|}\sum_{j\in S_k}\Big(\frac{1}{|N(k,j)|}\sum_{p\in N(k,j)} a_{kj}(p)\Big)x_j(t) \quad (18)$$

又、幾何平均を選べば、(19)の更新式を得る。

$$x_k(t+1) = \frac{1}{|S_k|}\sum_{j\in S_k}\Big(\prod_{p\in N(k,j)} a_{kj}(p)\Big)^{n_{kj}^{-1}} x_j(t) \qquad (19)$$

但し、(19)で $|N(k,j)| = n_{kj}$ である。

又、最大値関数を選べば、(20)の更新式を得る。

$$x_k(t+1)=\frac{1}{|S_k|}\sum_{j\in S_k}(\underset{p\in N(k,j)}{MAX}\ a_{kj}(p))x_j(t) \qquad (20)$$

(17)の更新式を、(9)の様に各行ごとに同じ係数((9)では1/N)が乗じられる基本形に、以下に変形する。

(17)の両辺に$|S_k|$を乗じ、(21)の両辺に$(N-|S_k|)x_k$を加える。

$$|S_k|x_k(t+1)=\sum_{j\in S_k}R(\{a_{kj}(p)x_j(t)\mid p\in N(k,j)\}) \quad (21)$$

$$N\ x_k(t+1)=\sum_{j\in S_k}R(\{a_{kj}(p)x_j(t)\mid p\in N(k,j)\})$$

$$+(N-|S_k|)x_k(t) \qquad (22)$$

代表値関数R が以下に示す(a)算術平均、(b)幾何平均、(c)最大値、等の場合には(22)の両辺をNで割れば、(23)のような基本形に変形できる（一般には必ずしも(23)の形の線形システムで記述できるとは限らない）。

$$x(t+1)=\frac{1}{N}A^*x(t) \qquad (23)$$

(a)算術平均

$$a_{kj}{}^*=\frac{1}{|N(k,j)|}\sum_{p\in N(k,j)}a_{kj}(p) \qquad for\ k\neq j \qquad (24)$$

$$a_{kk}{}^*=\frac{1}{|N(k,k)|}\sum_{p\in N(k,k)}a_{kk}(p)+N-|S_k| \quad for\ k=j \quad (25)$$

ここで、(25)の右辺第1項は通常1である。又、(24)にて$N(k,j)=\phi$なら、$a_{kj}{}^*=0$で、(25)にて$N(k,k)=\phi$なら、$a_{kk}{}^*=N-|S_k|$である。

(b)幾何平均

$$a_{kj}{}^*=(\prod_{p\in N(k,j)}a_{kj}(p))^{n_{kj}{}^{-1}} \quad for\ k\neq j \qquad (26)$$

$$a_{kk}{}^*=(\prod_{p\in N(k,k)}a_{kk}(p))^{n_{kk}{}^{-1}}+N-|S_k| \qquad for\ k=j \quad (27)$$

ここで、(27)の右辺第1項は通常1である。又、(26)にて$N(k,j)=\phi$なら、$a_{kj}{}^*=0$で、(27)にて$N(k,k)=\phi$なら、$a_{kk}{}^*=N-|S_k|$である。

(c)最大値関数

$$a_{kj}{}^*=\underset{p\in N(k,j)}{MAX}\{a_{kj}(p)\}\ \ for\ k\neq j \qquad (28)$$

$$a_{kk}{}^*=\underset{p\in N(k,k)}{MAX}\{a_{kk}(p)\}+N-|S_k| \quad for\ k=j \quad (29)$$

ここで、(29)の右辺第1項は通常1である。又、(28)にて$N(k,j)=\phi$なら、$a_{kj}{}^*=0$で、(29)にて$N(k,k)=\phi$なら$a_{kk}{}^*=N-|S_k|$である。

例2.1の(1)の行列Aに(a), (b), (c)を適用した変形行列A^*は其々(30)、(31)、(32)、例2.2の(2)の行列Aに対する変形行列A^*は其々(33)、(34)、(35)となる。

$$A^*=\begin{pmatrix}1&\frac{5}{2}&4\\\frac{1}{2}&1&5\\\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&1\end{pmatrix}(30) \qquad A^*=\begin{pmatrix}1&\sqrt{6}&4\\\frac{1}{2}&1&5\\\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&1\end{pmatrix} \qquad (31)$$

$$A^*=\begin{pmatrix}1&3&4\\\frac{1}{2}&1&5\\\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&1\end{pmatrix}(32) \qquad A^*=\begin{pmatrix}1&\frac{5}{2}&4\\\frac{1}{2}&1&5\\0&\frac{1}{3}&2\end{pmatrix} \qquad (33)$$

$$A^*=\begin{pmatrix}1&\sqrt{6}&4\\\frac{1}{2}&1&5\\0&\frac{1}{3}&2\end{pmatrix}(34) \qquad A^*=\begin{pmatrix}1&3&4\\\frac{1}{2}&1&5\\0&\frac{1}{3}&2\end{pmatrix} \qquad (34)$$

4. 計算例

多重測定下の率比較行列Aが(36)で与えられるときに、平均化プロセスⅠ、平均化プロセスⅡ(a) (b) (c)について、動的プロセス(9)、(23)の動特性を計算する。

$$A=\begin{pmatrix}(1)&(1,2,2,4)&(\phi)&(4)\\(\frac{1}{2})&(1)&(\frac{2}{3})&(2)\\(\phi)&(\frac{2}{3})&(1)&(\frac{4}{3})\\(\frac{1}{4})&(1,\frac{1}{4})&(\frac{3}{4})&(\phi)\end{pmatrix} \qquad (36)$$

平均化プロセスⅠの変形行列A^*を(37)その動特性を図1、平均化プロセスⅡ(a) (b) (c)の変形行列A^*を(38)、(39)、(40)、その動特性を図2、3、4、に示す。

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \quad (37) \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & \frac{9}{4} & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \quad (39) \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

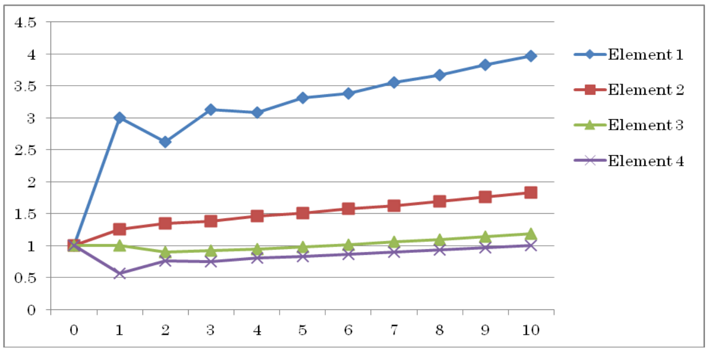

図1：平均化プロセスＩの $x(t+1) = \frac{1}{N} A^* x(t)$ 動特性

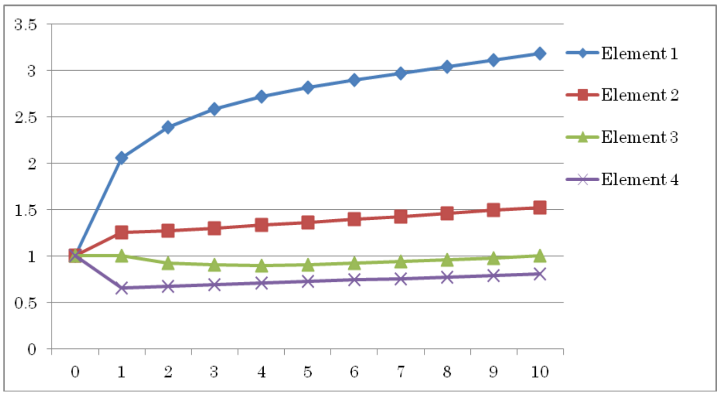

図2：平均化プロセスⅡ(a)算術平均の $x(t+1) = \frac{1}{N} A^* x(t)$ 動特性

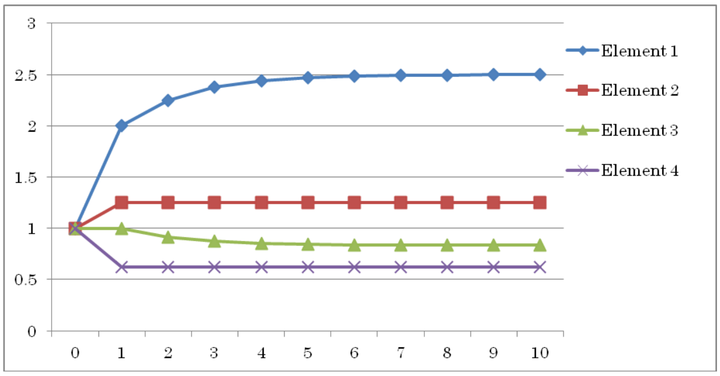

図3：平均化プロセスⅡ(b)幾何平均の $x(t+1) = \frac{1}{N} A^* x(t)$ 動特性

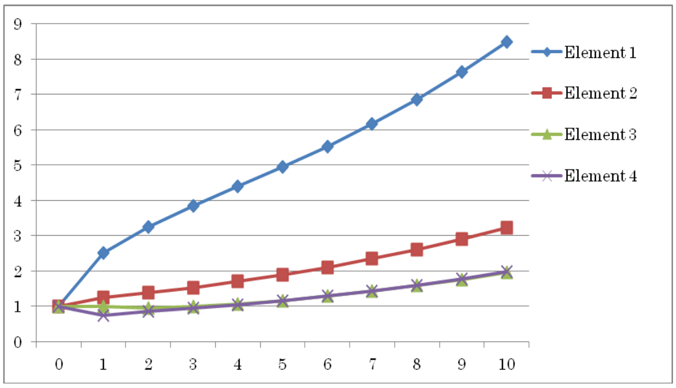

図4：平均化プロセスⅡ(c)最大値の $x(t+1) = \frac{1}{N} A^* x(t)$ 動特性

図1～図4において、全て初期値は $x(0)=(1,1,1,1)^T$ で、同じである。４つの動特性は、ウエイトの相対的大小関係においてほぼ同じ傾向を持つが、絶対値特性はかなり異なる。表１にt=10での正規化ウエイトベクトルを示すが、プロセスＩ、Ⅱa、Ⅱbとプロセス Ⅱcにおいて、ウエイト3とウエイト4の大小関係が逆転している。

表１：４つの平均化プロセス動特性の
t=10での正規化ウエイトベクトル

	プロセス Ｉ	プロセス Ⅱa	プロセス Ⅱb	プロセス Ⅱc
ウエイト１	0.496822	0.488533	0.4798726	0.542729
ウエイト２	0.229049	0.233791	0.24003	0.206162
ウエイト３	0.148509	0.153638	0.1600824	0.124862
ウエイト４	0.12562	0.124038	0.120015	0.126248

5. おわりに

通常の完全情報一対比較行列ならびに不完全情報一対比較行列をも含むより一般的な一対比較多重測定下のウェイトベクトル推定について、動的平均化プロセスDAP[1]の枠組みに基づくアプローチを提案した。例題により、４つの平均化プロセスの動特性を計算したが、詳細検討は今後の課題である。

参考文献

[1] Masaaki Shinohara : AHP Eigenvector via Dynamic Process of Pairwise Comparison and Averaging, ISAHP2011, No.ISAHP-019 Sorrento (June 15-18, 2011).