

一対比較平均化の評価プロセス（その2）

日大生産工（院）

○上久保 玲

日大生産工

篠原 正明

1、はじめに

本論文（その2）では、平均化操作、あるいはより一般的に代表値操作、として多項演算 $\min$ 、ならびに多項演算 $\max$ を採用した場合の特性を数値例にもとづき考察する。

2、 $\min$ 演算を整合性のある一対比較行列に適用した例

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0.5 & 1 & 1.5 & 2 \\ 0.333333 & 0.666666 & 1 & 1.333333 \\ 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1 \end{array} \quad (1)$$

$$x(t+1) = A \otimes x(t) \quad (2)$$

例2-1 : $x(0) = (1,1,1,1)^T$ で、(1)の比較行列 A に対して評価プロセス(2)を適用した結果を図1に示す。但し、(2)の第 k 要素 $x_k(t+1)$ は多項演算 $\min$ により(3)となる。

$$x_k(t+1) = \min\{a_{k1}x_1(t), a_{k2}x_2(t), a_{k3}x_3(t), a_{k4}x_4(t)\} \quad (3)$$

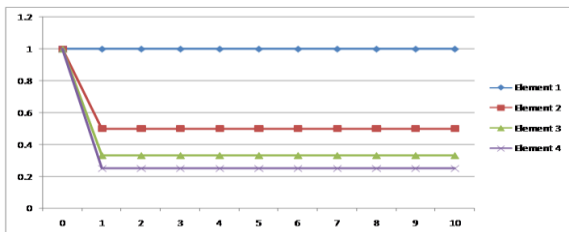


図1：ウェイトの過度特性（例2-1）

$$\text{例2-2 : } x(0) = (1,2,3,4)^T$$

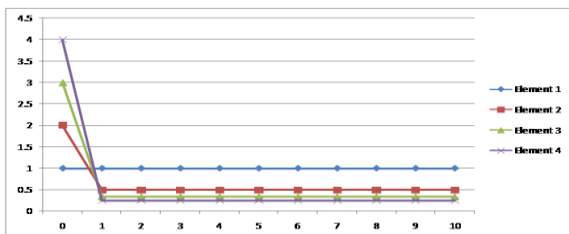


図2：ウェイトの過度特性（例2-2）

$$\text{例2-3 : } x(0) = (4,3,2,1)^T$$

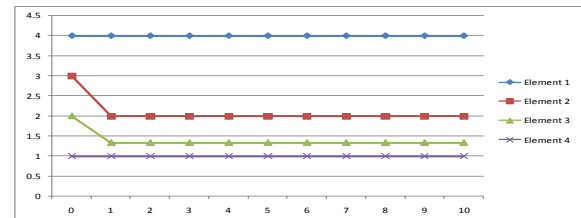


図3：ウェイトの過度特性（例2-3）

$$\text{例2-4 : } x(0) = (1,1,1,-1)^T$$

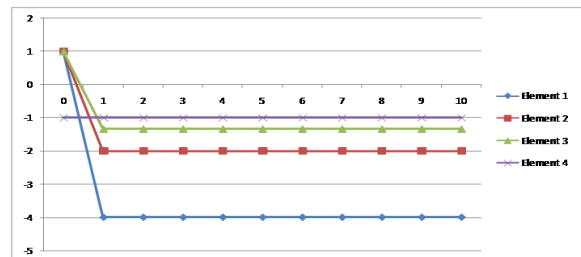


図4：ウェイトの過度特性（例2-4）

$$\text{例2-5 : } x(0) = (-1,-1,-1,-1)^T$$

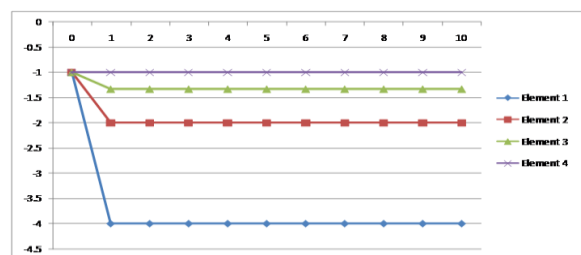


図5：ウェイトの過度特性（例2-5）

これらの例から整合性のある比較行列への $\min$ 演算適用について次のことが言える。

①初期値に関わらず、1回目からウェイトベクトルは安定する。

②安定した収束値は、12:6:4:3の比となる。

③初期値の一部を負の値にしても、正のウェイトベクトルに収束する。

3、min演算を整合性のない対比較行列に適用した例

$$A = \begin{bmatrix} & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0.2 & & & & \\ 0.333333 & 0.666666 & & & \\ 0.25 & 0.5 & 0.75 & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix} \quad (4)$$

例3-1 : $x(0) = (1,1,1,1)^T$

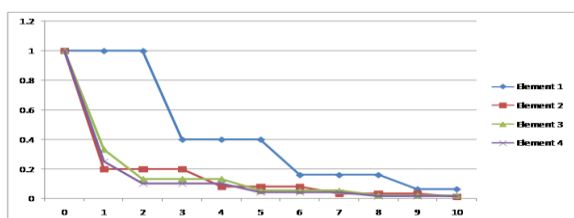


図6：ウェイトの過度特性（例3-1）

例3-2 : $x(0) = (1,2,3,4)^T$

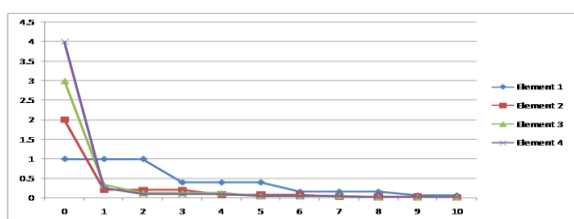


図7：ウェイトの過度特性（例3-2）

例3-3 : $x(0) = (4,3,2,1)^T$

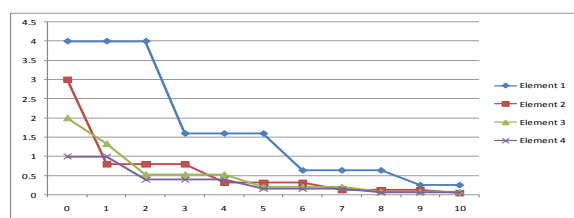


図8：ウェイトの過度特性（例3-3）

例3-4 : $x(0) = (1,1,1,-1)^T$

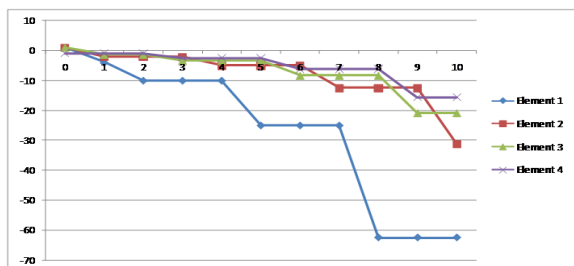


図9：ウェイトの過度特性（例3-4）

例3-5 : $x(0) = (-1,-1,-1,-1)^T$

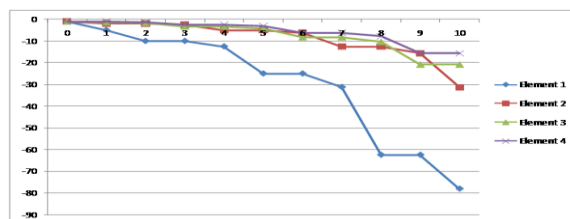


図10：ウェイトの過度特性（例3-5）

表1：例3-1～例3-5の第k行擬似固有値

	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5
t=0からt=1	1 0.2 0.333333 0.25	1 0.1 0.111111 0.0625	1 0.266667 0.666667 1	-4 -2 -1.333333 1	5 2 1.333333 1
t=1からt=2	1 1 0.4 0.4	1 1 0.4 0.4	1 1 0.4 0.4	2.5 1 1 1	2 1 1.25 1.25
t=2からt=3	0.4 0.999999 1 0.999999	0.4 0.999999 1 0.999999	0.4 0.999999 1 0.999999	1 1 2.5 2.5	1 1.25 2 2
t=3からt=4	1 0.4 0.999999 1	1 0.4 0.999999 1	1 0.4 0.999999 1	1 2.5 1 1	1.25 2 1 1
t=4からt=5	0.999999 1 0.4 0.4	0.999999 1 0.4 0.4	0.999999 1 0.4 0.4	2.5 1 1 1	2 1 1.25 1.25
t=5からt=6	0.4 0.999999 1 0.999999	0.4 0.999999 1 0.999999	0.4 0.999999 1 0.999999	1 1 2.5 2.5	1 1.25 2 2
t=6からt=7	1 0.4 0.999999 1	1 0.4 0.999999 1	1 0.4 0.999999 1	1 2.5 1 1	1.25 2 1 1
t=7からt=8	0.999999 1 0.4 0.4	0.999999 1 0.4 0.4	0.999999 1 0.4 0.4	2.5 1 1 1	2 1 1.25 1.25
t=8からt=9	0.4 0.999999 1 0.999999	0.4 0.999999 1 0.999999	0.4 0.999999 1 0.999999	1 1 2.5 2.5	1 1.25 2 2
t=9からt=10	1 0.4 0.999999 1	1 0.4 0.999999 1	1 0.4 0.999999 1	1 2.5 1 1	1.25 2 1 1

これらの例から整合性のない比較行列へのmin演算適用について次のことが言える。

- ①初期値に関わらず、ウェイトベクトルは安定せず、下降傾向。
- ②初期値が全て正ならば0に収束傾向、負の値が一つでもあると負領域で発散傾向。
- ③すべての例において一部の初期状態を除き、表1の第k行擬似固有値は3回おきに同じ値が出現している。但し、算術平均の場合のように各行の擬似固有値は一

致することはなかった。又、CI値= $\frac{4}{3}$ (固有値-1)の関
係にある。

4、max演算を整合性のある比較行列に適用した例

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0.5 & 0.333333 & 0.25 \\ 2 & 2 & 1 & 0.666666 & 0.5 \\ 3 & 3 & 1.5 & 1 & 0.75 \\ 4 & 4 & 2 & 1.333333 & 1 \end{array} \quad (5)$$

例4-1: $x(0) = (1,1,1,1)^T$ で、(5)の比較行列Aに
対して評価プロセス(2)を適用した結果を図1に示
す。但し、(2)の第k要素 $x_k(t+1)$ は、(3)では
なく、多項演算maxにより(6)となる。

$$x_k(t+1) = \max\{a_{k1}x_1(t), a_{k2}x_2(t), a_{k3}x_3(t), a_{k4}x_4(t)\} \quad (6)$$

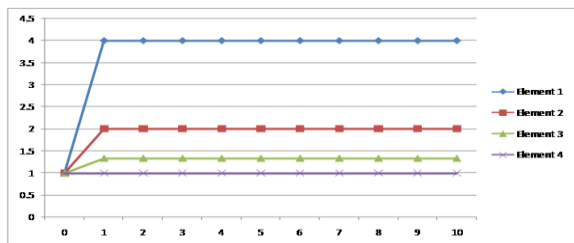


図1 1 : ウェイトの過度特性 (例4-1)

例4-2: $x(0) = (1,2,3,4)^T$

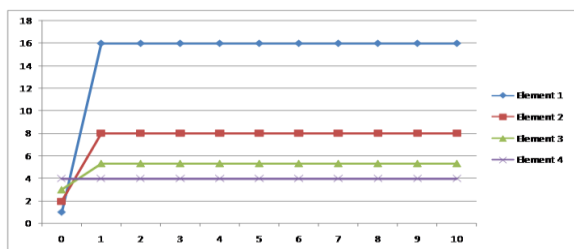


図1 2 : ウェイトの過度特性 (例4-2)

例4-3: $x(0) = (4,3,2,1)^T$

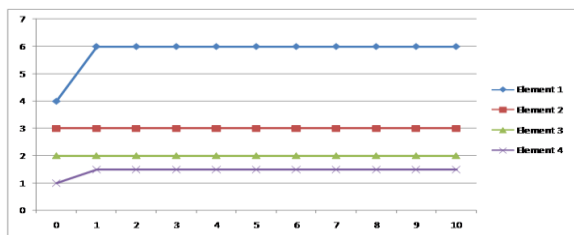


図1 3 : ウェイトの過度特性 (例4-3)

例4-4: $x(0) = (1,1,1,-1)^T$

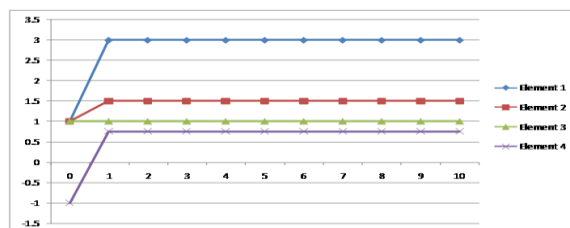


図1 4 : ウェイトの過度特性 (例4-4)

例4-5: $x(0) = (-1,-1,-1,-1)^T$

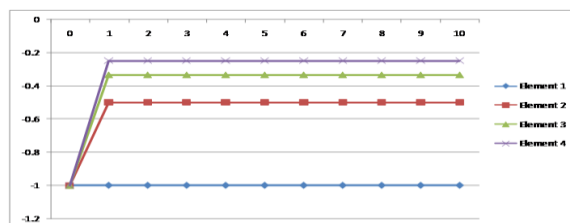


図1 5 : ウェイトの過度特性 (例4-5)

これらの例から整合性のある比較行列へのmax演算適
用について次のことが言える。

- ①初期値に関わらず、1回目からウェイトベクトルは
安定する。
- ②安定した収束値は、12:6:4:3の比となる。
- ③初期値の一部を負の値にしても、正のウェイトベク
トルに収束する。

5、max演算を用いた整合性のない対比較行列の例

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 5 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0.2 & 0.333333 & 0.25 \\ 5 & 5 & 1 & 1.5 & 2 \\ 3 & 3 & 0.666666 & 1 & 1.333333 \\ 4 & 4 & 2 & 1.333333 & 1 \end{array} \quad (7)$$

例5-1: $x(0) = (1,1,1,1)^T$

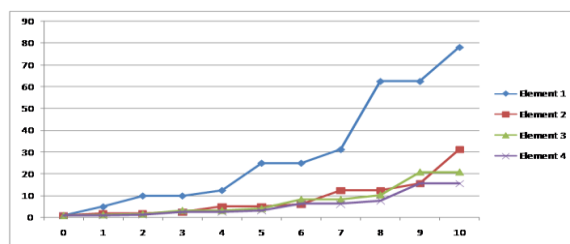


図1 6 : ウェイトの過度特性 (例5-1)

例5-2 : $x(0) = (1, 2, 3, 4)^T$

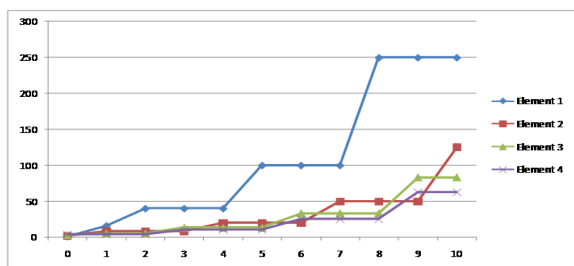


図17：ウェイトの過度特性（例5-2）

例5-3 : $x(0) = (4, 3, 2, 1)^T$

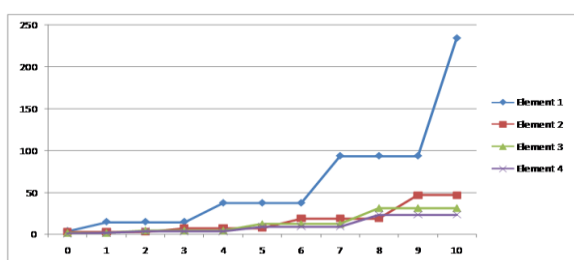


図18：ウェイトの過度特性（例5-3）

例5-4 : $x(0) = (1, 1, 1, -1)^T$

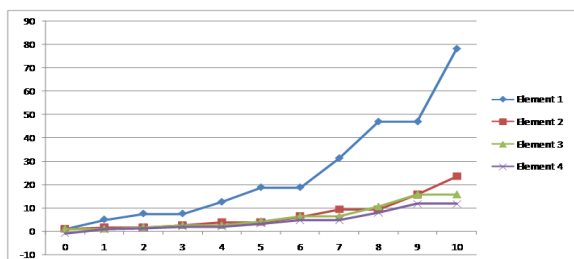


図19：ウェイトの過度特性（例5-4）

例5-5 : $x(0) = (-1, -1, -1, -1)^T$

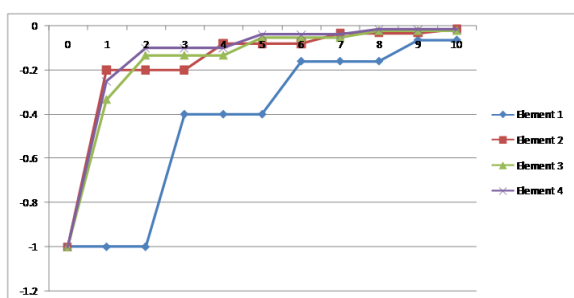


図20：ウェイトの過度特性（例5-5）

表2：例5-1～例5-5の第k行擬似固有値

	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5
t=0からt=1	5 2 1.333333 1	16 4 1.777777 1	3.75 1 1 1.5	5 1.5 1 -0.75	1 0.2 0.333333 0.25
t=1からt=2	2 1 1.25 1.25	2.5 1 1 1	1 1 2.5 2.5	1.5 1 1.666667 1.666667	1 1 0.4 0.4
t=2からt=3	1 1.25 2 2	1 1 2.5 2.5	1 1 1 1	1 1.666667 1.5 1.5	0.4 0.999999 1 0.999999
t=3からt=4	1.25 2 1 1	1 2.5 1 1	1 1 1 1	1.666667 1.5 1 1	1 0.4 0.999999 1
t=4からt=5	2 1 1.25 1.25	2.5 1 1 1	1 1 2.5 2.5	1.5 1 1.666667 1.666667	0.999999 1 0.4 0.4
t=5からt=6	1 1.25 2 2	1 1 2.5 2.5	1 1 1 1	1 1.666667 1.5 1.5	0.4 0.999999 1 0.999999
t=6からt=7	1.25 2 1 1	1 2.5 1 1	1 1 1 1	1.666667 1.5 1 1	1 0.4 0.999999 1
t=7からt=8	2 1 1.25 1.25	2.5 1 1 1	1 1 2.5 2.5	1.5 1 1.666667 1.666667	0.999999 1 0.4 0.4
t=8からt=9	1 1.25 2 2	1 1 2.5 2.5	1 1 1 1	1 1.666667 1.5 1.5	0.4 0.999999 1 0.999999
t=9からt=10	1.25 2 1 1	1 2.5 1 1	1 1 1 1	1.666667 1.5 1 1	1 0.4 0.999999 1

これらの例から整合性のない比較行列へのmax演算適用について次のことが言える。

- ①初期値に関わらず、ウェイトベクトルは安定せず、例5-5を除いて上昇傾向。
- ②例5-5は0に収束傾向
- ③すべての例において一部の初期状態を除き、表2の第k行擬似固有値は3回おきに同じ値が出現している。

6、おわりに

率比較行列のデータにもとづき項目ウェイトを評価し、決定するプロセスとして、（その1）で算術平均、（その2）でmax演算、min演算を採用した動的平均化プロセスを考察した。特に、（その2）でのmax演算、min演算にもとづくAHPウェイトベクトルは、パス代数における固有ベクトルの典型的な解釈例を提供した。max演算、min演算採用時の周期現象の解明ならびにmax演算、min演算以外の2項演算、多項演算、代表値関数の採用等が今後の課題である。